САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника
Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина и др.

Алгебра
и начала анализа

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

А.П. Щеглова

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

авторов

Ш.А. Алимова,
Ю.М. Колягина,
под научным руководством
А.Н. Тихонова
(М.: Просвещение)

10–11 классы

Москва • «ВАКО» • 2007

УДК 337:167.1:[512+517]
ББК 22.1я721
Щ33

Щеглова А.П.
Щ33 Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина. – М.: ВАКО, 2007. – 352 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-528-6

Пособие содержит подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа для 10–11 классов ***Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина (М.: Просвещение)***. Приводятся основные сведения по каждому разделу, алгоритмы решения типовых задач, ключи, ответы и подробный разбор заданий.

Автор – практикующий педагог с большим стажем подготовки абитуриентов к экзаменам.

УДК 337:167.1:[512+517]
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-94665-528-6

Глава VIII
Производная и ее геометрический смысл

§44. Производная

Основные понятия:

Производной функции $f(x)$ в точке x называется

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Производная линейной функции $(kx+b)'=k$.

776. Указание: средняя скорость равна $v_{ср}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$. См. задачу 777.

777. Найти среднюю скорость движения точки на отрезке [1; 1,2], если закон ее движения $s=s(t)$ задан формулой:

1) $s(t)=2t$. Решение: $v_{ср}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{2\cdot 1{,}2-2\cdot 1}{1{,}2-1}=2$. Ответ: 2.

2) $s(t)=t^2$. Решение: $v_{ср}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{1{,}2^2-1^2}{1{,}2-1}=2{,}2$. Ответ: 2,2.

778. Найти мгновенную скорость движения точки, если:

1) $s(t)=2t+1$. Решение: мгновенная скорость $v(t)=s'(t)=(2t+1)'=2$. Ответ: 2.

2) Аналогично 1).

779. Аналогично задачам 777, 778.

780. 1), 2) См. задачу 5 §44.

3) $f(x)=3x^2-5x$. Решение: по определению $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-5(x+h)-3x^2+5x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}(6x-5+3h)=6x-5$$

Т.е. $f'(x)=6x-5$. Ответ: $6x-5$.

4) Аналогично 3).

781. Указание: 1) $k=4$; 2) $k=-7$; 3) $k=-5$.

782. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения $s(t)$ задан формулой:

1) $s(t)=\frac{3}{2}t^2$. Решение: $v(t)=s'(t)$. $s(t+h)-s(t)=\frac{3}{2}(t+h)^2-\frac{3}{2}t^2=3th+\frac{3}{2}h^2$.

Тогда $s'(t)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3th+\frac{3}{2}h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(3t+\frac{3}{2}h\right)=3t$, т.е.

$v(t)=3t$. Ответ: $v(t)=3t$.

2) Аналогично 1).

783. Указание: $v(t)=s'(t)=2t$ (аналогично задаче 782). Тогда $v(5)=10$, $v(10)=20$.

784. Указание: $v_{1.\text{ср}}=\frac{1{,}5-0}{1}=1{,}5$, $v_{2.\text{ср}}=\frac{2{,}5-1{,}5}{2-1}=1$, $v_{3.\text{ср}}=\frac{3-2{,}5}{3-2}=0{,}5$.

785. Аналогично задаче 784.

786. 1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$. Решение: необходимо проверить, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое что $|(2x+1)-3|<\varepsilon$ для всех $x\neq 1$, так, что $|x-1|<\delta$. Преобразуем: $|(2x+1)-3|=2|x-1|$. Т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|(2x+1)-3|=2|x-1|<2\delta=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Равенство справедливо.

2) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$. Решение: необходимо проверить, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что $|x^2-4|<\varepsilon$ для всех $x\neq 2$, так что $|x-2|<\delta$. Преобразуем: $|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{3};\frac{1}{3}\right)$. Тогда $|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|<3\cdot\min\left(\frac{\varepsilon}{3};\frac{1}{3}\right)\le\varepsilon$. Равенство справедливо.

§45. Производная степенной функции

$$\left((kx+b)^p\right)'=pk(kx+b)^{p-1}$$

787. 1) x^6. Решение: по формуле, где $k=1$, $b=0$ и $p=6$: $\left(x^6\right)'=6x^5$. Ответ: $6x^5$

2) $\left(x^7\right)'=7x^6$; 3) $\left(x^{11}\right)'=11x^{10}$; 4) $\left(x^{13}\right)'=13x^{12}$.

788. 1) x^{-2}. Решение: по формуле, где $k=1$, $b=0$ и $p=-2$: $\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-3}$.

2) $\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-4}$; 3) $\left(x^{-4}\right)'=-4x^{-5}$; 4) $\left(x^{-7}\right)'=-7x^{-8}$.

789. 1) $x^{\frac{1}{2}}$. Решение: по формуле, где $k=1$, $b=0$ и $p=\frac{1}{2}$: $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

2) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $\left(x^{-\frac{2}{7}}\right)'=-\frac{2}{7}x^{-\frac{9}{7}}$; 4) $\left(x^{\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$.

790. 1) $\left(\frac{1}{x^5}\right)'=\left(x^{-5}\right)'=-5x^{-6}$; 2) $\left(\frac{1}{x^9}\right)'=\left(x^{-9}\right)'=-9x^{-10}$;

3) $\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)'=\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$.

791. 1) $\left((4x-3)^2\right)'=2\cdot4\cdot(4x-3)^1=8(4x-3)$;

2) $\left((5x+2)^{-3}\right)'=-3\cdot5\cdot(5x+2)^{-4}=-15(5x+2)^{-4}$;

3) $\left((1-2x)^{-6}\right)'=(-6)\cdot(-2)\cdot(1-2x)^{-7}=12(1-2x)^{-7}$;

4) $\left((2-5x)^4\right)'=-5\cdot4\cdot(2-5x)^3=-20(2-5x)^3$;

5) $\left((2x)^3\right)'=2\cdot3\cdot(2x)^2=24x^2$;

6) $\left((-5x)^4\right)'=-5\cdot4\cdot(-5x)^3=2500x^3$.

792. 1) $\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)'=\left((2x+7)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot2\cdot(2x+7)^{-\frac{2}{3}}$;

2) $\left(\sqrt[4]{7-3x}\right)'=\left((-3x+7)^{\frac{1}{4}}\right)'=-3\cdot\frac{1}{4}\cdot(-3x+7)^{-\frac{3}{4}}=-\frac{3}{4}(7-3x)^{-\frac{3}{4}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{3x}\right)'=\left((3x)^{\frac{1}{4}}\right)'=3\cdot\frac{1}{4}\cdot(3x)^{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{4}(x)^{-\frac{3}{4}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{5x}\right)'=\left((5x)^{\frac{1}{3}}\right)'=5\cdot\frac{1}{3}\cdot(5x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{3}(x)^{-\frac{2}{3}}$.

793. 1) $f(x)=x^6$, $x_0=0{,}5$. Решение: $f'(x)=\left(x^6\right)'=6x^5=6\cdot(0{,}5)^5=0{,}375$.

Ответ: 0,375

2) $f'(x)=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-3}=-2\cdot 3^{-3}=-\frac{2}{27}$;

3) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$;

4) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3}\cdot 8^{-2/3}=\frac{1}{3}\cdot 2^{-2}=\frac{1}{12}$;

5) $f'(x)=\left(\sqrt{5-4x}\right)'=\left((5-4x)^{\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{4}{2}(5-4x)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{4}{2}1^{-\frac{1}{2}}=-2$;

6) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\right)'=\left((3x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot 3(3x+1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}\cdot 4^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{16}$.

794. Указание: $y'=4x^3$, см. рис. 102.

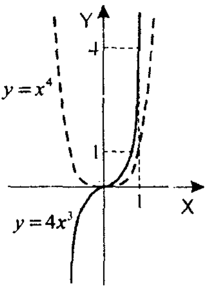

Рис. 102

795. Указание: $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(x^3\right)'=3x^2$ (что соответствует рисунку) и $\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

796. 1) $\left(\frac{1}{(2+3x)^2}\right)'=\left((2+3x)^{-2}\right)'=-6(2+3x)^{-3}$;

2) $\left(\frac{1}{(3-2x)^3}\right)'=\left((3-2x)^{-3}\right)'=6(3-2x)^{-4}$;

3) $\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{2}{3}}\right)'=2(3x-2)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $\left(\sqrt[7]{(3-14x)^2}\right)'=\left((3-14x)^{\frac{2}{7}}\right)'=-4(3-14x)^{-\frac{5}{7}}$;

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}\right)'=\left((3x-7)^{-\frac{1}{3}}\right)'=-(3x-7)^{-\frac{4}{3}}$;

6) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right)'=\left((1-2x)^{-\frac{2}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{5}{3}}$.

797. 1) Указание: $f'(x)=3x^2$, аналогично 2).

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Решение: $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Т.е.

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=1$, откуда $\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}$, $x=\frac{8}{27}$. Ответ: $x=\frac{8}{27}$.

798. Указание: мгновенная скорость равна $s'(3)$. Аналогично задаче 793.

799. При каких значениях x выполняется равенство $f'(x)=f(x)$, если:

1) $f(x)=(2x-1)^2$. Решение: $f'(x)=2\cdot 2\cdot(2x-1)=4\cdot(2x-1)$. Таким образом $4(2x-1)=(2x-1)^2$, откуда $2x-1=0$ или $2x-1=4$, $x=0{,}5$ или $x=2{,}5$.

Ответ: $x=0{,}5$, $x=2{,}5$.

2) Указание: $f'(x)=3\cdot 3(3x+2)^2$, аналогично 1).

800. 1) Указание: $f(x)=x^2+1$, $f'(x)=2x$ (см. задачу 780).

2) Указание: $f(x)=1-x^2$, $f'(x)=-2x$ (см. задачу 780).

801. Указание: решите уравнение $f'(x)=f(x)$, т.е. $\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}=\sqrt{3x-7}$.

§46. Правила дифференцирования

1°. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$;

2°. $(cf(x))'=cf'(x)$ для любой постоянной $c\in\mathbf{R}$;

3°. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

4°. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;

5°. $f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

802. 1) x^2+x. Решение: по свойству 1° $(x^2+x)'=(x^2)'+x'=2x+1$. Ответ: $2x+1$

2) $(x^2-x)'=(x^2)'+(-x)'=2x-1$;

3) $(3x^2)'=3\cdot 2\cdot x=6x$;
4) $(-17x^2)'=-17\cdot 2\cdot x=-34x$;

5) $(-4x^3)'=-4\cdot 3\cdot x^2=-12x^2$;
6) $(0{,}5x^3)'=0{,}5\cdot 3x^2=1{,}5x^2$;

7) $(13x^2+26)'=13(x^2)'+26(x^0)'=13\cdot 2x+26\cdot 0=26x$;

8) $(8x^2-16)'=(8x^2)'-(16)'=16x-0=16x$.

803. 1) $\left(3x^2-5x+5\right)'=\left(3x^2\right)'+\left(-5x\right)'+5'=6x-5$;

2) $\left(5x^2+6x-7\right)'=\left(5x^2\right)'+\left(6x\right)'-7'=10x+6$;

3) $\left(x^4+2x^2\right)'=\left(x^4\right)'+\left(2x^2\right)'=4x^3+4x$;

4) $\left(x^5-3x^2\right)'=\left(x^5\right)'+\left(-3x^2\right)'=5x^4-6x$;

5) $\left(x^3+5x\right)'=\left(x^3\right)'+\left(5x\right)'=3x^2+5$;

6) $\left(-2x^3+18x\right)'=\left(-2x^3\right)'+\left(18x\right)'=-6x^2+18$;

7) $\left(2x^3-3x^2+6x+1\right)'=\left(2x^3\right)'+\left(-3x^2\right)'+\left(6x\right)'+1'=6x^2-6x+6$;

8) $\left(-3x^3+2x^2-x-5\right)'=\left(-3x^3\right)'+\left(2x^2\right)'+\left(-x\right)'+\left(-5\right)'=-9x^2+4x-1$.

804. Указание: $\left(3(x-2)^2+1\right)'=3\cdot 2(x-2)$, см. рис. 103.

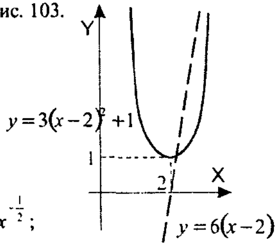

Рис. 103

805. 1) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)'=\left(x^2\right)'+\left(x^{-3}\right)'=2x-3x^{-4}$;

2) $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)'=\left(x^3\right)'+\left(x^{-2}\right)'=3x^2-2x^{-3}$;

3) $\left(2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right)'=\left(2x^{\frac{1}{4}}\right)'-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

4) $\left(3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[14]{x}\right)'=\left(3x^{\frac{1}{6}}\right)'+\left(7x^{\frac{1}{14}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{5}{6}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{13}{14}}$.

806. 1) $f'(x)=\left(x^2-2x+1\right)'=2x-2$. Тогда $f'(0)=-2$, а $f'(2)=2$.

2) $f'(x)=\left(x^3-2x\right)'=3x^2-2$. Тогда $f'(0)=-2$, а $f'(2)=10$.

3) $f'(x)=\left(-x^3+x^2\right)'=-3x^2+2x$. Тогда $f'(0)=0$, а $f'(2)=-8$.

4) $f'(x)=\left(x^2+x+1\right)'=2x+1$. Тогда $f'(0)=1$, а $f'(2)=5$.

807. 1) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-1}\right)'+\left(x^{-2}\right)'=-x^{-2}-2x^{-3}$. $f'(3)=-\dfrac{5}{27}$, $f'(1)=-3$.

2) $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+1\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+\left(x^{-1}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}$. $f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}-\dfrac{1}{9}$,

$f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

3) $f'(x)=\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right)'=3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'-2\left(x^{-3}\right)'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}+6x^{-4}$, $f'(3)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{2}{27}$, $f'(1)=4{,}5$.

4) $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$, $f'(3)=\frac{14}{3\sqrt{3}}$, $f'(1)=3$.

808. 1) $y=\frac{2}{x-1}$, $x_0=1$. Решение: $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$. Т.к. значение y' в точке $x=1$ не определено, то функция в этой точке не дифференцируема.

2) $y=\frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x_0=3$. Решение: $y'=\frac{(3x-5)'(x-3)^{-2}-2(3x-5)(x-3)^{-3}}{(x-3)^4}$. Т.к. значение y' в точке $x=3$ не определено, то функция в этой точке не дифференцируема.

3) $y=\sqrt{x+1}$, $x=0$. Решение: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Т.к. значение y' в точке $x=0$ определено, следовательно, функция в этой точке дифференцируема.

4) $y=\sqrt{5-x}$, $x=4$. Решение: $y'=-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$. Т.к. значение y' в точке $x=4$ определено, следовательно, функция в этой точке дифференцируема.

809. 1) $f'(x)=\left(x^3-2x\right)'=3x^2-2=0$. Тогда $x^2=\frac{2}{3}$, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2) $f'(x)=\left(-x^2+3x+1\right)'=-2x+3=0$. Тогда $2x=3$, откуда $x=\frac{3}{2}$.

3) $f'(x)=\left(2x^3+3x^2-12x-3\right)'=6x^2+6x-12=0$. Тогда $x^2+x-2=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-2$.

4) $f'(x)=\left(x^3+2x^2-7x+1\right)'=3x^2+4x-7=0$. Тогда $(x-1)(3x-7)=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-\frac{7}{3}$.

5) $f'(x)=\left(3x^4-4x^3-12x^2\right)'=12x^3-12x^2-24x=0$. Тогда $12x\left(x^2-x-2\right)=0$; $12x(x-2)(x+1)=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$.

6) $f'(x)=\left(x^4+4x^3-8x^2-5\right)'=4x^3+12x^2-16x=0$. Тогда $4x(x+4)(x-1)=0$, откуда $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=1$.

810. 1) $\left((x^2-x)(x^3+x)\right)' = (x^2-x)'(x^3+x)+(x^2-x)(x^3+x)' =$

$=(2x-1)(x^3+x)+(x^2-x)(3x^2+1)= 5x^4-4x^3+3x^2-2x$.

2) $\left((x+2)\sqrt[3]{x}\right)' = (x+2)'\sqrt[3]{x}+(x+2)\left(x^{1/3}\right)' = \sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}(x+2)x^{-2/3} = \frac{4x+2}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3) $\left((x-1)\sqrt{x}\right)' = (x-1)'\cdot\sqrt{x}+(x-1)(\sqrt{x})' = \sqrt{x}+\frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

811. 1) $f'(x) = \left((x-1)^8(2-x)^7\right)' = \left((x-1)^8\right)'(2-x)^7+\left((2-x)^7\right)'(x-1)^8 =$

$=8(x-1)^7(2-x)^7+7\cdot(-1)(2-x)^6(x-1)^8 = 8(x-1)^7(2-x)^7-7(2-x)^6(x-1)^8$,

откуда $f'(1)=0$.

2) $f'(x) = \left((2x-1)^5(1+x)^4\right)' = \left((2x-1)^5\right)'(1+x)^4+(2x-1)^5\left((1+x)^4\right)' =$

$=10(2x-1)^4(1+x)^4+4(2x-1)^5(1+x)^3$, откуда $f'(1)=160+32=192$.

3) $f'(x) = \left(\sqrt{2-x}(3-2x)^8\right)' = \left((2-x)^{\frac{1}{2}}\right)'(3-2x)^8+\sqrt{2-x}\left((3-2x)^8\right)' =$

$= -\frac{(3-2x)^8}{2\sqrt{2-x}}-16\sqrt{2-x}(3-2x)^7$. Тогда $f'(1) = -\frac{1}{2}-16 = -16{,}5$.

4) $f'(x) = \left((5x-4)^6\sqrt{3x-2}\right)' = \left((5x-4)^6\right)'\sqrt{3x-2}+(5x-4)^6\left(\sqrt{3x-2}\right)' =$

$=30\cdot(5x-4)^5\sqrt{3x-2}+\frac{3}{2}\frac{(5x-4)^6}{\sqrt{3x-2}}$. Тогда $f'(1)=31{,}5$.

812. Указание: выясните, имеет ли решение уравнение $3x^2+4x-3=3x+1$.

813. Указание: по свойству 3° $\left((x-3)^5(2+5x)^6\right)' =$

$=5(x-3)^4(2+5x)^6+30(x-3)^5(2+5x)^5 = (x-3)^4(2+5x)^5(10+25x+30x-90) =$

$=(x-3)^4(2+5x)^5(55x-80)$.

814. 1) $\left(\frac{x^5+x^3+x}{x+1}\right)' = \frac{(x^5+x^3+x)'(x+1)-(x^5+x^3+x)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \frac{(5x^4+3x^2+1)(x+1)-(x^5+x^3+x)}{(x+1)^2} = \frac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$.

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)'(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2x\right)(x-1)-\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}+x^2+2x-1}{(x-1)^2}.$

815. 1) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, отсюда $f'(1)=1$.

2) $f'(x)=\left(\dfrac{2x^2}{1-7x}\right)' = \dfrac{4x(1-7x)+14x^2}{(1-7x)^2} = 2\dfrac{2x-7x^2}{(1-7x)^2}$, отсюда $f'(1)=-\dfrac{5}{18}$.

816. 1) $g(x)=1-x$, $f(g)=g^{\frac{3}{2}}$. Решение: по определению $f(g(x))=(g(x))^{3/2}=$

$=(1-x)^{3/2}$. Ответ: $(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

2) $g(x)=\ln x$, $f(g)=\sqrt{g}$. Решение: по определению $f(g(x))=\sqrt{g(x)}=$

$=\sqrt{\ln x}$. Ответ: $\sqrt{\ln x}$.

817. 1) $F(x)=\sqrt{2x^2-7}$. Решение: рассмотрим функцию $f(g)=\sqrt{g}$, тогда

$F(x)=f(2x^2-7)$, т.е. $g(x)=2x^2-7$. Тогда $F(x)=f(g(x))$.

Ответ: $f(g)=\sqrt{g}$, $g(x)=2x^2-7$.

2) $F(x)=\sin\left(x^2+1\right)$. Решение: рассмотрим функцию $f(g)=\sin g$, тогда

$F(x)=f(x^2+1)$, т.е. $g(x)=x^2+1$. Тогда $F(x)=f(g(x))$.

Ответ: $f(g)=\sin g$, $g(x)=x^2+1$.

818. 1) $\left(\dfrac{x^3+x^2+16}{x}\right)' = \left(x^2+x+16x^{-1}\right)' = 2x+1-\dfrac{16}{x^2}$.

2) $\left(\dfrac{x\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x+3x^{\frac{2}{3}}+18x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 1+2x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}+2x-6}{x\sqrt[3]{x}}$.

819. 1) $\left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}+2x^{-\frac{3}{2}}$.

2) $\left(\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\right)'=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

820. 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)=(2x-3)^5(3x^2+2x+1)'+((2x-3)^5)'(3x^2+2x+1)=$

$=(2x-3)^4(2(2x-3)(3x+1)+10(3x^2+2x+1))=2(2x-3)^4(21x^2+3x+2)$.

2) $(x-1)^4(x+1)^7=(x-1)^4((x+1)^7)'+((x-1)^4)'(x+1)^7=$

$=7(x-1)^4(x+1)^6+4(x-1)^3(x+1)^7=(x^2-1)^3(x+1)^3(11x-3)$.

3) $\sqrt[4]{3x+2}(3x-1)^4=\left((3x+2)^{\frac{1}{4}}\right)'(3x-1)^4+(3x+2)^{\frac{1}{4}}((3x-1)^4)'=$

$=\frac{3}{4}(3x+2)^{-\frac{3}{4}}(3x-1)^4+12(3x+2)^{\frac{1}{4}}(3x-1)^3=3(3x-1)^3\left(\frac{3x-1}{4\sqrt[4]{(3x+2)^3}}+4\sqrt[4]{3x+2}\right)$

4) Аналогично 3).

821. 1) Аналогично 2).

2) $\left(\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}\right)'=\frac{(6x+2)(2x+1)-2(3x^2+2x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{2(3x^2+3x+2)}{(2x+1)^2}$.

3) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$. Решение: рассмотрим функции $f(g)=g+\frac{1}{g}$ и

$g(x)=\frac{2-x}{\sqrt{x}}$. Т.е. $f(g(x))=\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$. Тогда $\left(\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)'=f'(g(x))g'(x)$.

$f'(g)=\left(g+\frac{1}{g}\right)'=1-\frac{1}{g^2}$, $g'(x)=\left(\frac{2-x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{-\sqrt{x}-(2-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$.

Окончательно $\left(\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}\right)'=f'(g(x))g'(x)=\left(1-\frac{1}{\left(\frac{2-x}{\sqrt{x}}\right)^2}\right)\cdot\left(-\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}\right)=$

$=\left(\frac{x}{(x-2)^2}-1\right)\cdot\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$. Ответ: $\left(\frac{x}{(x-2)^2}-1\right)\cdot\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$.

822. При каких значениях аргумента x значение производной функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ равно 0?

Решение: $f'(x)=6x^2-6x-12$, т.е. $6x^2-6x-12=0$, $x^2-x-2=0$, откуда $x=-1$ и $x=2$. Ответ: $x=-1$, $x=2$.

823. Указание: аналогично задаче 822. Решите уравнение $\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=3$.

824. Указание: $f'(x)=(x-1)'(x-2)(x-3)+(x-1)((x-2)(x-3))'=$

$=(x-2)(x-3)+(x-1)((x-2)+(x-3))=3x^2-12x+11$. Аналогично задаче 822

825. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x)=x^4-4x^2+1$. Решение: $f'(x)=4x^3-8x$. Необходимо решить неравенство $4x^3-8x>0$, $4x(x^2-2)>0$, $4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})>0$. Решая методом интервалов, находим $x>\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}<x<0$. Ответ: $x>\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}<x<0$.

2) Указание: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x-2)(x+1)$, аналогично 1).

3) $f(x)=(x+2)^2\sqrt{x}$. Решение: область определения функции $x\geq 0$. Тогда $f'(x)=2(x+2)\sqrt{x}+(x+2)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(5x+2)(x+2)}{2\sqrt{x}}$. Т.е. необходимо решить неравенство $\frac{(5x+2)(x+2)}{2\sqrt{x}}>0$, откуда (с учетом области определения неравенства) $x>0$. Ответ: $x>0$.

4) Указание: $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, аналогично 3).

826. Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) Указание: см. задачу 825. $y'=-12(5-3x)^3(3x-1)^3+9(5-3x)^4(3x-1)^2=$

$=(5-3x)^3(3x-1)^2(-36x+12+45-27x)=(5-3x)^3(3x-1)^2(-63x+57)$.

2) Указание: см. задачу 825. $y'=4(2x-3)(3-2x)^3-6(2x-3)^2(3-2x)^2=$

$$= (2x-3)(3-2x)^2(12-8x-12x+18) = (2x-3)(3-2x)^2(30-20x).$$

3) $y = \dfrac{3x^2-1}{1-2x}$. Решение: $y' = \dfrac{6x(1-2x)-(-2)(3x^2-1)}{(1-2x)^2} = \dfrac{-6x^2+6x-2}{(1-2x)^2}$.

Т.е. необходимо решить неравенство $\dfrac{-6x^2+6x-2}{(1-2x)^2} < 0$, $\dfrac{3x^2-3x+1}{(1-2x)^2} > 0$.

Поскольку $3x^2-3x+1>0$ при всех x, то решением неравенства является вся его область определения, т.е. $x \neq 0{,}5$. Ответ: $x \neq 0{,}5$.

4) Указание: $y' = \dfrac{9x^2(1-3x)-(-3)\cdot 3x^3}{(1-3x)^2} = \dfrac{9x^2(1-2x)}{(1-3x)^2}$, аналогично 3).

827. Указание: угловая скорость $\omega(t) = \varphi'(t) = 0{,}2t - 0{,}5$.

828. Указание: мгновенная скорость тела равна $v(t) = s'(t) = -1+2t$. Тогда искомая энергия равна $\dfrac{mv^2(10)}{2}$.

829. Указание: плотность $\rho(l) = m'(l) = 4l+3$. 1) найдите $\rho(3)$, 2) найдите $\rho(25)$.

830. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ при $x<2$ и при $x>3$.

Решение: рассмотрим функцию $F(g) = \sqrt{g}$. Тогда $f(x) = F(x^2-5x+6)$.

Т.е. если $g(x) = x^2-5x+6$, то $f(x) = F(g(x))$. Тогда по свойству 5° имеем: $f'(x) = F'(g(x))g'(x)$. $F'(g) = \dfrac{1}{2\sqrt{g}}$, поэтому $f'(x) = F'(g(x))g'(x) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\cdot(x^2-5x+6)' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}.$$ Ответ: $f'(x) = \dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$.

§47. Производные некоторых элементарных функций

$$(e^x)' = e^x;\quad (a^x)' = \ln a\cdot a^x;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\quad (\ln(kx+b))' = \frac{k}{kx+b};\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x;\quad (\cos x)' = -\sin x.$$

831. 1) $(e^x+1)'=(e^x)'+1'=e^x$; 2) $(e^x+x^2)'=(e^x)'+(x^2)'=e^x+2x$;

3) $\left(e^{2x}+\frac{1}{x}\right)'=2e^x-\frac{1}{x^2}$; 4) $(e^{-3x}+\sqrt{x})'=-3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

832. 1) $(e^{2x+1}+2x^3)'=(2x+1)'e^{2x+1}+6x^2=2e^{2x+1}+6x^2$;

2) $\left(e^{\frac{1}{2}x-1}-\sqrt{x-1}\right)'=\left(\frac{1}{2}x-1\right)'e^{\frac{1}{2}x-1}-(x-1)'\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

3) $\left(e^{0,3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=0{,}3e^{0,3x+2}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$;

4) $(e^{1-x}+x^{-3})'=-e^{1-x}-3x^{-4}$;

5) $\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2xe^{x^2}$;

6) $\left(e^{2x^3}\right)'=(2x^3)'e^{2x^3}=6x^2e^{2x^3}$.

833. 1) $(2^x+e^x)'=2^x\ln 2+e^x$; 2) $(3^x-x^{-2})'=3^x\ln 3+2x^{-3}$;

3) $(e^{2x}-x)'=2e^{2x}-1$; 4) $(e^{3x}+2x^2)'=3e^{3x}+4x$;

5) $\left(3^{x^2+2}\right)'=3^{x^2+2}\ln 3\cdot(x^2+2)'=2x\cdot 3^{x^2+2}\ln 3$.

834. 1) $(0{,}5^x+e^{3x})'=0{,}5^x\ln 0{,}5+3e^{3x}$; 2) $(3^x-e^{2x})'=3^x\ln 3-2e^{2x}$;

3) $(e^{2-x}+\sqrt[3]{x})'=-e^{2-x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $\left(e^{3-x}+\frac{1}{x^4}\right)'=-e^{3-x}-4x^{-5}$.

835. 1) $(2\ln x+3^x)'=\frac{2}{x}+3^x\ln 3$; 2) $(3\ln x-2^x)'=\frac{3}{x}-2^x\ln 2$;

3) $\left(\log_2 x+\frac{1}{2x}\right)'=\frac{1}{x\ln 2}-\frac{1}{2x^2}$; 4) $(3x^{-3}-\log_3 x)'=-9x^{-4}-\frac{1}{x\ln 3}$;

5) $(\ln(x^2-2x))'=(x^2-2x)'\cdot\frac{1}{(x^2-2x)}=\frac{2x-2}{x^2-2x}$;

6) $((3x^2-2)\log_3 x)'=(3x^2-2)'\log_3 x+(3x^2-2)(\log_3 x)'=6x\log_3 x+\frac{3x^2-2}{x\ln 3}$.

836. 1) $\left(\sin x + x^2\right)' = \cos x + 2x$; 2) $(\cos x - 1)' = -\sin x$;

3) $\left(\cos x + e^x\right)' = -\sin x + e^x$; 4) $\left(\sin x - 2^x\right)' = \cos x - 2^x \ln 2$.

837. 1) $(\sin(2x-1))' = 2\cos(2x-1)$; 2) $(\cos(x+2))' = -\sin(x+2)$;

3) $(\sin(3-x))' = -\cos(3-x)$; 4) $\left(\cos\left(x^3\right)\right)' = -3x^2 \sin\left(x^3\right)$.

838. 1) $\left(\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+e^{3x}\right)' = \left(\frac{x}{2}-1\right)'\left(-\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)+(3x)'e^{3x} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)+3e^{3x}$

2) $\left(\sin\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x\right)' = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x \ln 2$;

3) $\left(3\cos 4x - \frac{1}{2x}\right)' = 3\cdot(4x)'(-\sin 4x)+\frac{1}{2x^2} = -12\sin 4x + \frac{1}{2x^2}$.

839. 1) $\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$;

2) $\left(\frac{3^x}{\sin x}\right)' = \frac{3^x \ln 3 \cdot \sin x - 3^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3^x \ln 3}{\sin x} - \frac{3^x \cos x}{\sin^2 x}$;

3) $\ln x \cdot \cos 3x = \frac{\cos 3x}{x} - 3\ln x \cdot \sin 3x$;

4) $(\log_3 x \cdot \sin 2x)' = (\log_3 x)' \sin 2x + \log_3 x(\sin 2x)' = \frac{\sin 2x}{x \ln 3} + 2\log_3 x \cos 2x$.

840. 1) $f'(x) = 2e^{2x-4} + \frac{2}{x}$, $f'(2) = 2e^0 + 1 = 3$.

2) $f'(x) = 3e^{3x-2} - \frac{3}{3x-1}$, $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 - 3 = 0$.

3) $f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 2}$, $f'(1) = 2\ln 2 - \frac{1}{\ln 2}$.

4) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 0{,}5} - 3^x \ln 3$, $f'(1) = \frac{1}{\ln 0{,}5} - 3\ln 3$.

841. 1) $f(x)=x-\cos x$. Решение: $f'(x)=1+\sin x$, т.е. $1+\sin x=0$, откуда $\sin x=-1$, $x=2\pi k-\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=2\pi k-\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$. Решение: $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\cos x$, т.е. $\cos x=\dfrac{1}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) $f(x)=2\ln(x+3)-x$. Решение: $f'(x)=\dfrac{2}{x+3}-1$, т.е. $\dfrac{2}{x+3}-1=0$, откуда $x+3=2$, $x=-1$. Ответ: $x=-1$.

4) Указание: аналогично 3), $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$.

5) Указание: аналогично 6), $f'(x)=2x+2-\dfrac{12}{x}$.

6) $f(x)=x^2-6x-8\ln x$. Решение: $f'(x)=2x-6-\dfrac{8}{x}$, откуда $2x-6-\dfrac{8}{x}=0$, $\dfrac{2(x^2-3x-4)}{x}=0$, откуда $x=4$ и $x=-1$ (не удовлетворяет области определения функции $f(x)$). Ответ: $x=4$.

842. 1) Указание: $f'(x)=e^x-1$, аналогично 3).

2) Указание: $f'(x)=\ln 2-2^x\ln 2=\ln 2(1-2^x)$, аналогично 3).

3) $f(x)=e^x x^2$. Решение: $f'(x)=e^x x^2+e^x\cdot 2x=e^x\cdot x(x+2)$. Таким образом: $e^x\cdot x(x+2)>0$, откуда (т.к. $e^x>0$ при всех x) $x>0$ или $x<-2$. Ответ: $x>0$, $x<-2$.

4) $f(x)=e^x\sqrt{x}$. Решение: $f'(x)=e^x\sqrt{x}+e^x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{(2x+1)e^x}{2\sqrt{x}}>0$, откуда $x>-0{,}5$. С учетом О.О. функций $f(x)$ и $f'(x)$ окончательно получаем $x>0$. Ответ: $x>0$.

843. 1) $\left(\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}+\ln\dfrac{2x+3}{5}\right)'=\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)'\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3}}}+\left(\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}\right)'\dfrac{5}{2x+3}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2x-1}}+\frac{2}{2x+3}.$$

2) $$\left(\sqrt{\frac{1-x}{6}}-2\ln\frac{2-5x}{3}\right)'=-\frac{1}{2\cdot 6}\left(\frac{1-x}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{2\cdot 3}{2-5x}\cdot(-5)=-\frac{1}{2\sqrt{6(1-x)}}+\frac{30}{2-5x};$$

3) $$\left(2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\frac{1-x}{2}\right)'=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x\right)e^{\frac{1-x}{3}}-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{1-x}{2}=$$

$$=-\frac{2}{3}e^{\frac{1-x}{3}}+\frac{3}{2}\sin\frac{1-x}{2}.$$

4) $$\left(3e^{\frac{2-x}{3}}-2\sin\frac{1+x}{4}\right)'=3e^{\frac{2-x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-2\cos\frac{1+x}{4}\cdot\frac{1}{4}=-e^{\frac{2-x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}.$$

844. 1) $$\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}}-3\cos\frac{x-2}{3}\right)'=\left(\left(\frac{2-x}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)'+3\sin\frac{x-2}{3}\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)'=\frac{1}{9}+\sin\frac{x-2}{3}.$$

2) $$\left(2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}\right)'=2\left((x+2)^{-\frac{3}{4}}\right)'-5\cdot\frac{1}{5}e^{\frac{x-4}{5}}=-\frac{3}{2}(x+2)^{-\frac{7}{4}}-e^{\frac{x-4}{5}}.$$

845. 1) $(0{,}5^x\cdot\cos 2x)'=(0{,}5^x)'\cos 2x+0{,}5^x(\cos 2x)'=0{,}5^x\ln 0{,}5\cdot\cos 2x-0{,}5^x\cdot 2\sin 2x$

2) $$\left(5\sqrt{x}\cdot e^{-x}\right)'=\frac{5}{2\sqrt{x}}e^{-x}-5\sqrt{x}\cdot e^{-x}=\frac{5(1-2x)}{2\sqrt{x}}e^{-x}.$$

3) $$\left(e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)\right)'=-2e^{3-2x}\cos(3-2x)-2e^{3-2x}\sin(3-2x)=$$

$$=-2e^{3-2x}(\sin(3-2x)+\cos(3-2x)).$$

846. 1) $$\left(\ln\sqrt{x-1}\right)'=\left(\sqrt{x-1}\right)'\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2(x-1)};$$

2) Указание: $\left(e^{\sqrt{x+3}}\right)'=\left(\sqrt{x+3}\right)'e^{\sqrt{x+3}}$;

3) $$(\ln(\cos x))'=(\cos x)'\cdot\frac{1}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg}x;$$

4) $(\ln(\sin x))' = (\sin x)' \cdot \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.

847. 1) $\left(2^{\cos x+1}\right)' = (\cos x+1)' 2^{\cos x+1} \cdot \ln 2 = -\sin x \cdot 2^{\cos x+1} \cdot \ln 2$;

2) $\left(0{,}5^{1+\sin x}\right)' = (1+\sin x)' 0{,}5^{1+\sin x} \ln 0{,}5 = 0{,}5^{1+\sin x} \cos x \cdot \ln 0{,}5$;

3) $\left(\cos\sqrt[3]{x+2}\right)' = -\left((x+2)^{\frac{1}{3}}\right)' \sin\sqrt[3]{x+2} = -\dfrac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \sin\sqrt[3]{x+2}$;

4) $(\sin(\ln x))' = (\ln x)' \cos(\ln x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

848. 1) $\left(\sqrt{x^2+2x-1}\right)' = (x^2+2x-1)' \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2+2x-1}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$;

2) $\left(\sqrt[3]{\sin x}\right)' = \left((\sin x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}} \cos x$;

3) $\left(\sqrt[4]{\cos x}\right)' = \left((\cos x)^{\frac{1}{4}}\right)' = -\dfrac{1}{4}(\cos x)^{-\frac{3}{4}} \sin x = -\dfrac{\sin x}{4\sqrt[4]{\cos^3 x}}$;

4) Указание: $\left(\sqrt{\log_2 x}\right)' = (\log_2 x)' \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\log_2 x}}$.

849. 1) $\left(\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - (1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-1-\cos x}{\sin^2 x}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3x}}{3^x+1} = \dfrac{\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}(3^x+1) - 3^x\sqrt{3x} \cdot \ln 3}{(3^x+1)^2} = \dfrac{\sqrt{3}(3^x+1-2\cdot 3^x x\ln 3)}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$;

3) $\dfrac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5} = \dfrac{0{,}5e^{0,5x}(\cos 2x-5) - e^{0,5x}(\cos 2x-5)'}{(\cos 2x-5)^2} = \dfrac{0{,}5e^{0,5x} - e^{0,5x}}{\cos 2x-5} =$

$= \dfrac{0{,}5e^{0,5x}}{5-\cos 2x}$;

4) $\left(\dfrac{5^{2x}}{\sin 3x+7}\right)' = \dfrac{(2x)' \cdot 5^{2x} \ln 5(\sin 3x+7) - (3x)' \cos 3x \cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2} =$

$= \dfrac{2\cdot 5^{2x} \ln 5(\sin 3x+7) - 3\cos 3x \cdot 5^{2x}}{(\sin 3x+7)^2}$;

850. 1) Указание: $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}\right)'=\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)x-\left(e^x-e^{-x}\right)}{x^2}$.

2) $\left(\dfrac{2^x-\log_2 x}{\ln 2\cdot x}\right)'=\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{\left(2^x\ln 2-\dfrac{1}{x\ln 2}\right)x-\left(2^x-\log_2 x\right)}{x^2}=$

$=\dfrac{2^x}{x}-\dfrac{1}{x^2\ln 4}-\dfrac{2^x-\log_2 x}{x^2\ln 2}$.

851. 1) Указание: $\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{x}\right)'=\dfrac{(\cos x+\sin x)x-(\sin x-\cos x)}{x^2}$.

2) $\left(\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\right)'=\dfrac{-2\cos 2x(\sin x-\cos x)-(1-\sin 2x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$

$=\dfrac{-2\cos 2x(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)^2(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$

$=\dfrac{(\sin x-\cos x)(-2\cos 2x+\cos 2x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x-\cos^2 x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\sin x+\cos x$

852. 1) $f(x)=5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x$. Решение:

$f'(x)=5(\cos x+\sin x)-5\sqrt{2}\sin 5x=5\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-5\sqrt{2}\sin 5x=$

$=10\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+3x\right)$. Тогда $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-2x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+3x\right)=0$, откуда $\dfrac{\pi}{8}-2x=\pi k$ или $\dfrac{\pi}{8}+3x=\pi k+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Окончательно $x=\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{\pi k}{2}$ или $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{\pi k}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: аналогично 1), $f'(x)=10\sin 2x+2(\cos x+\sin x)-2=$

$=5(\sin x+\cos x)^2+2(\cos x+\sin x)-7=10\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-7$.

853. 1) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$. Решение: область определения функции $x>0{,}5$.

Тогда $f(x)=0$ равносильно уравнению $\ln(2x-1)=0$, откуда $x_0=1$.

$f'(x)=2e^{2x}\ln(2x-1)+\frac{2e^{2x}}{2x-1}$, тогда $f'(x_0)=2e^2\ln 1+\frac{2e^2}{1}=2e^2$. Ответ: $2e^2$.

2) Указание: аналогично 1). $f(x)=0$ в точках $x=\pi k+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

$$f'(x)=\frac{(\cos x+\sin x)\sin x-(\sin x-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

854. Указание: $f'(x)=\sin 2x+2x\cos 2x$.

855. 1) Указание: $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, аналогично 3).

2) Указание: $f'(x)=\ln x+1$, аналогично 3).

3) $f(x)=x^2\ln x$. Решение: $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$. Область определения функции $f'(x)$ $x>0$, поэтому $f'(x)=0$ равносильно $\ln x=-0{,}5$, откуда $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Тогда $f'(x)>0$ при $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ и $f'(x)<0$ при $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$. Ответ: $f'(x)=0$ при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$; $f'(x)>0$ при $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$; $f'(x)<0$ при $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$.

4) Указание: $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3(x^3-1)}{x}$, аналогично 3).

856. Найти производную $\ln(x^2-5x+6)$ при $x<2$ и при $x>3$.

Решение: на указанном промежутке $x^2-5x+6>0$, таким образом $(\ln(x^2-5x+6))'=\frac{(x^2-5x+6)'}{x^2-5x+6}=\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. Ответ: $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$.

§48. Геометрический смысл производной

Основные понятия:

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Общий вид уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

857. Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью OX угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$. Решение: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, тогда $-3 = 1 \cdot 2 + b$, откуда $b = -5$. Ответ: $k = 1$; $b = -5$.

2)–4) Аналогично 1).

858. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$. Решение: угловой коэффициент касательной равен $k = f'(x_0)$. $f'(x) = 3x^2$, откуда $k = 3$. Ответ: $k = 3$.

2)–4) Аналогично 1).

859. Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью OX:

1), 2) Аналогично 3).

3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$. Решение: найдем угловой коэффициент, $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, откуда $k = f'(x_0) = f'(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

4) Указание: $f'(x) = -\frac{9}{x\sqrt{x}}$, аналогично 3).

5) Указание: $f'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{3x+1}{2}}$, аналогично 3).

6) Указание: $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$, аналогично 3).

860. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$. Решение: $f'(x) = 2x + 1$, откуда $f'(1) = 3$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = 3(x-1) + f(1)$, т.е. $y = 3x$.

Ответ: $y = 3x$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=3$. Решение: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, откуда $f'(3)=-\frac{1}{9}$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-\frac{1}{9}(x-3)+f(3)$, т.е. $y=-\frac{x}{9}+\frac{2}{3}$.

Ответ: $y=-\frac{2}{9}x+1$.

4) Указание: $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$, аналогично 1), 3).

5) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$. Решение: $f'(x)=\cos x$, откуда $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда уравнение касательной имеет вид $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+1-\frac{\pi}{4}\right)$.

6) Указание: $f'(x)=e^x$, аналогично 1), 3).

7) Указание: $f'(x)=\frac{1}{x}$, аналогично 1), 3).

8) Указание: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, аналогично 1), 3).

861. 1) Указание: производная принимает положительные значения в точках A, B и E; отрицательные значения в точках D и G; нулевые значения в точках C и F.

2) Указание: производная принимает положительные значения в точках C и G; отрицательные значения в точках A и E; нулевые значения в точках B, D и F.

862. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$.

1) $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$. Решение: $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(0)=0$, $f(0)=1$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=0\cdot(x-0)+1$, т.е. $y=1$. Ответ: $y=1$.

2) Указание: $f'(x)=2\cos 2x-\frac{1}{x+1}$, аналогично 1).

863. Найти угол между осью OY и касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$.

1) $f(x)=x+e^{-x}$. Решение: найдем угловой коэффициент касательной в точке $x=0$, $f'(x)=1-e^{-x}$, откуда $f'(0)=1-e^{0}=1-1=0$. Тогда угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$ и осью OX равен $\alpha=\operatorname{arctg}0=0$, тогда угол между осью OY и касательной к графику функции равен $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}$. Ответ: $\beta=\frac{\pi}{2}$.

2) Аналогично 1).

3) Указание: аналогично 1), $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, откуда $\beta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

864. Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y=8-x$ и $y=4\sqrt{x+4}$. Решение: найдем точку пересечения графиков: $8-x=4\sqrt{x+4}$; $x^2-16x+64=16x+64$, откуда $x=0$ или $x=32$ (посторонний корень). Напишем уравнение касательной к графику каждой из функций в точке $x_0=0$. Т.к. график первой функции – прямая, то касательная совпадает с $y=8-x$. Для второй функции $\left(4\sqrt{x+4}\right)'=\frac{2}{\sqrt{x+4}}$, откуда $y=1\cdot(x-0)+8$, $y=x+8$ (см. рис. 104). Угол наклона первой прямой равен $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, а второй $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. Тогда угол между прямым и равен $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

2) Указание: аналогично 1) находим координаты точки пересечения графиков $x_0=0$. Уравнение касательной к первому графику $y=x+\frac{1}{2}$, ко второму $y=-x+\frac{1}{2}$. См. рис. 105.

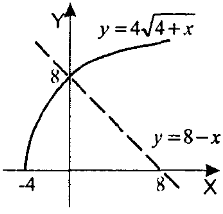

Рис. 104

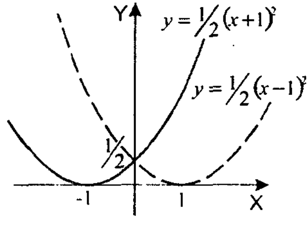

Рис. 105

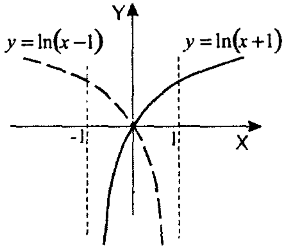

Рис. 106

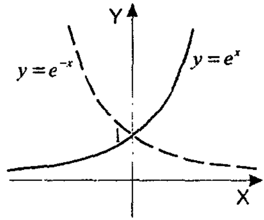

Рис. 107

3) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ и $y=\ln(1-x)$. Решение: находим точку пересечения графиков $x_0=0$. Тогда $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, т.е. уравнение одной касательной $y = x$; $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$, откуда уравнение второй касательной $y=-x$ (см. рис. 106). Угол наклона первой прямой равен $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, а второй $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$. Тогда угол между прямыми равен $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

4) Указание: аналогично 3), см. рис. 107.

865. Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке общую касательную. Написать уравнение этой касательной:

1) $y=x^4$ и $y=x^6+2x^2$. Решение: рассмотрим уравнение $x^4=x^6+2x^2$, $x^2(x^4-x^2+2)=0$. Оно имеет единственный корень $x_0=0$ (выражение в скобке является квадратным трехчленом относительно x^2, $D<0$). Напишем уравнение касательной к каждой из функций в точке $x_0=0$. $(x^4)'=4x^3$, тогда $y=0$ и $(x^6+2x^2)'=6x^5+4x$, тогда касательная прямая также $y=0$. Ответ: общая касательная в точке $x_0=0$ $y=0$.

2) Аналогично 1).

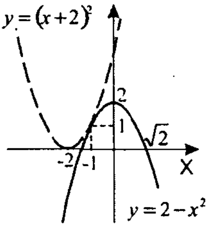

Рис. 108

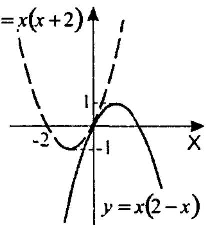

Рис. 109

3) $y=(x+2)^2$ и $y=2-x^2$. Решение: рассмотрим уравнение $(x+2)^2=2-x^2$, $2x^2+4x+2=0$, $2(x+1)^2=0$. Оно имеет единственный корень $x_0=-1$. Напишем уравнение касательной к каждой из функций в точке $x_0=-1$. $\left((x+2)^2\right)'=2(x+2)$, т.е. $y=2(2-1)(x+1)+(-1+2)^2$,

$y=2x+3$; $\left(2-x^2\right)'=-2x$. Тогда касательная прямая

$y=(-2)\cdot(-1)\cdot(x+1)+\left(2-(-1)^2\right)$, то есть также $y=2x+3$ (см. рис. 108).

Ответ: общая касательная в точке $x_0=-1$ $y=2x+3$.

4) Аналогично 3). См. рис. 109.

866. Найти точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y=kx$:

1) $f(x)=e^x+e^{-x}$, $k=\dfrac{3}{2}$. Решение: прямые параллельны, если их угловые коэффициенты совпадают, т.е. необходимо $f'(x)=\dfrac{3}{2}$.

$f'(x)=e^x-e^{-x}$, откуда $e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{3}{2}$, т.е. $e^x=2$ или $e^x=-\dfrac{1}{2}$ (постороннее решение). Тогда $x=\ln 2$. Ответ: $x=\ln 2$.

2)–4) Аналогично 1).

867. Указание: решите уравнение $y'(x)=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

868. Найти точки, в которых касательные к кривым $f(x)=x^3-x-1$ и $g(x)=3x^2-4x+1$ параллельны. Написать уравнение этих касательных.

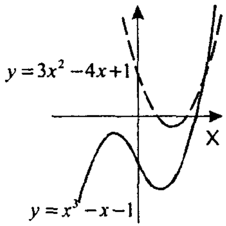

Рис. 110

Решение: $f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=6x-4$. Необходимо решить уравнение $f'(x)=g'(x)$, т.е. $3(x-1)^2=0$, откуда $x=1$. Тогда уравнение касательной к графику $y=f(x)$ $y=f'(1)(x-1)+f(1)$, т.е. $y=2x-3$. А уравнение касательной к графику $y=g(x)$ $y=g'(1)(x-1)+g(1)$, т.е. $y=2x-2$.

Ответ: $x=1$, $y=2x-3$ и $y=2x-2$. См. рис. 110

Упражнения к главе VIII

869. 1) $\left(2x^4-x^3+3x+4\right)'=2\cdot4x^3-3x^2+3=8x^3-3x^2+3$;

2) $\left(-x^5+2x^3-3x^2-1\right)'=-5x^4+6x^2-6x$;

3) $\left(6\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)'=\left(6x^{\frac{1}{3}}+x^{-2}\right)'=2x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-3}$;

4) $\left(\dfrac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}\right)'=\left(2x^{-3}-8x^{\frac{1}{4}}\right)'=-6x^{-4}-2x^{-\frac{3}{4}}$;

5) $\left((2x+3)^8\right)'=16(2x+3)^7$; 6) $\left((4-3x)^7\right)'=-21(4-3x)^6$;

7) $\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{1}{3}}\right)'=(3x-2)^{-\frac{2}{3}}$;

8) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)'=\left((1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right)'=2(1-4x)^{-\frac{3}{2}}$.

870. Указание: воспользуйтесь формулами из §47.

871. 1) $(\sin5x+\cos(2x-3))'=5\cos5x-2\sin(2x-3)$;

2) $\left(e^{2x}-\ln3x\right)'=2e^{2x}-\dfrac{3}{3x}$;

3) $(\sin(x-3)-\ln(1-2x))'=\cos(x-3)+\dfrac{2}{1-2x}$;

4) $\left(6\sin\dfrac{2x}{3}-e^{1-3x}\right)'=4\cos\dfrac{2x}{3}+3e^{1-3x}$.

872. 1)–4), 6) Аналогично 5).

5) $\left(e^{-x}\sin x\right)' = \left(e^{-x}\right)'\sin x + e^{-x}(\sin x)' = (-x)'e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x =$

$= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$;

873. 1) $\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\left(x^3+1\right)'\left(x^2+1\right) - \left(x^3+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{3x^2\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^3+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^4+3x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

2)–4) Аналогично 1).

874. 1) $\left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x\cdot(\sin x)' = 3\sin^2 x\cos x$;

2) $\left(8^{\cos x}\right)' = 8^{\cos x}\ln 8\cdot(\cos x)' = -8^{\cos x}\ln 8\cdot\sin x$;

3) Аналогично 1).

4) $\left(\ln\left(x^3\right)\right)' = \dfrac{1}{x^3}\cdot\left(x^3\right)' = \dfrac{3x^2}{x^3} = \dfrac{3}{x}$.

875. 1) Указание: $f'(x) = 6x^2 - 2x$.

2) Указание: $f'(x) = -9x^2 + 4x$.

3) Указание: $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 20 = 5\left(x^2-4\right)\left(x^2+1\right)$.

4) Указание: $f'(x) = 3(x+3)^2(x-4)^2 + 2(x+3)^3(x-4) =$
$= (x+3)^2(x-4)(3x-12+2x+6)$.

5) Указание: $f'(x) = \dfrac{3(x-2)-(3x+1)}{(x-2)^2} = -\dfrac{7}{(x-2)^2}$.

6) Указание: $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$.

876. 1) $f'(x) = -\sin x\sin x + \cos x\cos x = \ = \cos 2x$, тогда $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $f'(x) = \dfrac{\left(1+e^x\right) - xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}$, тогда : $f'(0) = \dfrac{2-0}{2^2} = \dfrac{1}{2}$.

877. 1)–3) аналогично 4).

4) $y = \cos x$, $x_0 = \pi/3$. Решение: по формуле уравнения касательной имеем $y = \cos'\dfrac{\pi}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\dfrac{\pi}{3}$, т.е. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2}\right)$.

878. Указание: скорость тела $v(t)=s'(t)=t+3$.

879. 1) $(\cos^2 3x)'=2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'=-2\cos 3x\sin 3x\cdot 3=-3\sin 6x$.

2) Аналогично 3).

3) $((x^3+1)\cos 2x)'=(x^3+1)'\cos 2x+(x^3+1)(\cos 2x)'=3x^2\cos 2x-2(x^3+1)\sin 2x$;

4) Аналогично 1).

5) $$\left((x+1)\sqrt[3]{x^2}\right)'=(x+1)'\sqrt[3]{x^2}+(x+1)\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}}$$

6) Аналогично 5).

880. 1) Аналогично 4).

2) Аналогично 3).

3) $$\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)'=\frac{\sqrt{x+2}-\frac{x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=\frac{x+4}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4) $$\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)'=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-1+\sin 2x-1-\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^2}=-\frac{2}{1-\sin 2x}.$$

881. 1) $(\log_2(x^3-x^2+1))'=$

$$=\frac{1}{\ln 2(x^3-x^2+1)}\cdot(x^3-x^2+1)'=\frac{3x^2-2x}{\ln 2(x^3-x^2+1)}..$$

2) $$((\log_2 x)^3)'=3(\log_2 x)^2(\log_2 x)'=\frac{3\log_2^2 x}{x\ln 2}.$$

3) Указание: $(\sin(\log_3 x))'=\cos(\log_3 x)\cdot(\log_3 x)'$.

4) Указание: $(\cos 3^x)'=-\sin 3^x\cdot(3^x)'$.

882. Ответ: г), а), в), б).

883. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) Указание: $f'(x)=(2^x-2^{-x})\ln 2$.

2) Указание: $f'(x)=2\cdot 3^{2x}\ln 3-2\ln 3=2\ln 3(3^{2x}-1)$.

3) Указание: $f'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$ при $x>0$.

4) Указание: $f'(x)=1+\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{2x+3}{2x+1}$ при $x>-0{,}5$.

5) $f(x)=6x-x\sqrt{x}$. Решение: область определения функции $x\ge 0$. Тогда

$$f'(x)=6-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=6-\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\left(4-\sqrt{x}\right).$$ Т.е. $f'(x)=0$ при $x=16$,

$f'(x)>0$ при $0\le x<16$ и $f'(x)<0$ при $x>16$.

Ответ: $f'(x)=0$ при $x=0$; $f'(x)>0$ при $0\le x<16$; $f'(x)<0$ при $x>16$.

6) Указание: $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}-3$, аналогично 5).

884. Аналогично задаче 885.

885. Найти все значения a, при которых $f'(x)\le 0$ для всех действительных значений x, если $f(x)=ax^3-6x^2-x$. Решение: $f'(x)=3ax^2-12x-1$ – квадратный трехчлен. Для того, чтобы $f'(x)\le 0$ для всех действительных значений x необходимо и достаточно $\begin{cases}a<0\\ D=144+12a\le 0\end{cases}$, $\begin{cases}a<0\\ 12(a+12)\le 0\end{cases}$, откуда $a\le -12$. Ответ: $a\le -12$.

886. Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x)=0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x)=ax^2-\dfrac{1}{x^2}$. Решение: $f'(x)=2ax+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2\left(ax^4+1\right)}{x^3}$. Т.е. необходимо, чтобы уравнение $ax^4+1=0$ не имело корней, откуда $a\ge 0$. Ответ: $a\ge 0$.

2) Аналогично 1).

3), 4) Аналогично задаче 885.

887. Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x)<0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x)=ax^7+x^3-1$. Решение: $f'(x)=7ax^6+3x^2=x^2\left(7ax^4+3\right)$. То есть $x^2\left(7ax^4+3\right)\ge 0$ при всех x, откуда $a\ge 0$. Ответ: $a\ge 0$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x)=(x+a)\sqrt{x}$. Решение: $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x+a}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x+a}{2\sqrt{x}}$. Необходимо,

чтобы $\frac{3x+a}{2\sqrt{x}} \ge 0$ для всех x из области определения $f(x)$ и $f'(x)$, т.е. для всех $x > 0$, поэтому $a \ge 0$. Ответ: $a \ge 0$.

4) Аналогично 3).

888. 1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6-x}$. Решение: найдем координаты точки пересечения, $2\sqrt{x} = 2\sqrt{6-x}$, откуда $x = 3$. Тогда $\left(2\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, т.е. угол наклона касательной к первому графику равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. $\left(2\sqrt{6-x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{6-x}}$, откуда угол наклона касательной ко второму графику равен $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Тогда угол между графиками равен $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2) Указание: аналогично 1), угол наклона второй прямой равен 0.

889. 1) Указание: $y' = \cos x/2$.

2) Указание: $y' = -2^{-x}\ln 2 + 2^{-2x+1}\ln 2$.

3) Указание: $y' = \frac{(3-x)+(x+2)}{(3-x)^2}$.

4) Указание: $y' = 1 + 1/x$.

890. Найти уравнение касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$. Решение: для того чтобы прямые были параллельны, необходимо совпадение их угловых коэффициентов, т.е. $f'(x) = 6$. Тогда $x^2 - 5x = 6$, откуда $x_1 = 6$ и $x_2 = -1$. Тогда уравнение первой касательной $y = 6(x-6) - 18$, а уравнение второй касательной $y = 6(x+1) - 2\frac{5}{6}$. Ответ: $y = 6x - 54$, $y = 6x + 3\frac{1}{6}$.

891. Указание: см. рис. 111, уравнение касательной $y = -4x + 8$, тогда площадь треугольника равна $S = 1/2 \cdot 8 \cdot 2$.

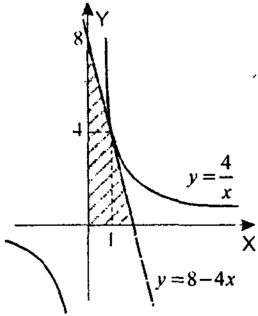

Рис. 111

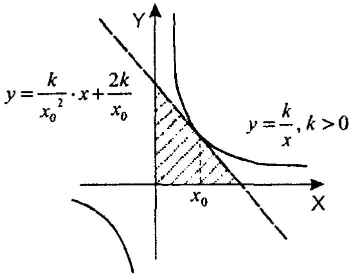

Рис. 112

892. Указание: общий вид уравнения касательной: $y=-\frac{k}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{k}{x_0}$, т.е.

$y=-\frac{k}{x_0^2}x+\frac{2k}{x_0}$. См. рис. 112.

893. Указание: уравнение касательной имеет вид:

$y=(3x_0^2-p)(x-x_0)+x_0^3-px_0$, откуда $3=(3-p)(2-1)+1-p$.

894. Указание: $y'=\frac{1}{\ln 4}\left(4^x\ln 4-2^{x+1}\ln 2\right)=4^x-\frac{1}{2}\cdot 2^{x+1}=4^x-2^x$. Решите уравнение $4^x-2^x=2$. Аналогично задаче 890

895. Найти расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y=x\ln x$, которая параллельна оси абсцисс. Решение: $y'=\ln x+1$, необходимо $\ln x+1=0$, откуда $x={}^1\!/_e$. Тогда уравнение такой касательной $y=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}$, $y=-\frac{1}{e}$. Таким образом, расстояние до начала координат равно ${}^1\!/_e$ (см. рис. 113). Ответ: ${}^1\!/_e$.

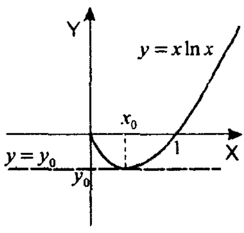

Рис. 113

896. Выяснить, при каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$. Решение: пусть прямая касается графика в точке x_0, тогда

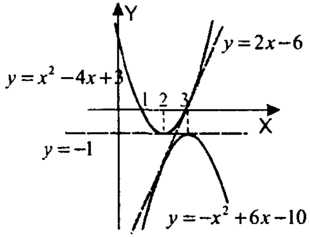

Рис. 114

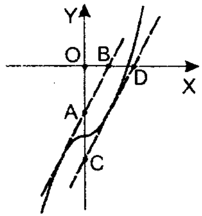

Рис. 115

$y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+1+\ln x_0$ и $y=ax-2$ совпадают. Т.е. $\begin{cases}\frac{1}{x_0}=a\\ \ln x_0=-2\end{cases}$, откуда

$x_0=\frac{1}{e^2}$ и $a=e^2$. Ответ: $a=e^2$.

897. Найти общие касательные к графикам функций $f(x)=x^2-4x+3$ и $g(x)=-x^2+6x-10$. Решение: пусть общая касательная касается первого графика в точке x_1, а второго в точке x_2 (см. рис. 114). Тогда прямые $y=(2x_1-4)(x-x_1)+x_1^2-4x_1+3$ и $y=(-2x_2+6)(x-x_2)-x_2^2+6x_2-10$ совпадают. Т.е. $\begin{cases}2x_1-4=-2x_2+6\\ -x_1^2+3=x_2^2-10\end{cases}$, $\begin{cases}x_1+x_2=5\\ x_2^2+x_1^2=13\end{cases}$. откуда получаем два решения: (2; 3) и (3; 2). Значит уравнение первой общей касательной $y=-1$, а уравнение второй – $y=2x-6$. Ответ: $y=-1$; $y=2x-6$.

898. Указание: $y'=3x^2$, т.к. угловые коэффициенты касательных совпадают, то если одна прямая касается графика в точке с абсциссой x_0, то другая – в точке с абсциссой $-x_0$. См. рис. 115.

Глава IX
Применение производной к исследованию функций

§49. Возрастание и убывание функции

Если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на промежутке, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Теорема 1

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Теорема 2

Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех , то функция возрастает (убывает) на $(a; b)$.

899. Доказать, что функция $f'(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $x > 1$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 1$.

Решение: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$. При $x > 1$ $f'(x) > 0$, поэтому по теореме 2 $f(x)$ возрастает, а при $x < 0$ и $0 < x < 1$ $f'(x) < 0$, поэтому $f(x)$ убывает, ч.т.д.

900. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

1) $y = x^2 - x$. Решение: $y' = 2x - 1$. $y' > 0$ при $x > \frac{1}{2}$, т.е. при $x > \frac{1}{2}$ функция возрастает и $y' < 0$ при $x < \frac{1}{2}$.

Ответ: функция возрастает при $x > \frac{1}{2}$ и убывает при $x < \frac{1}{2}$.

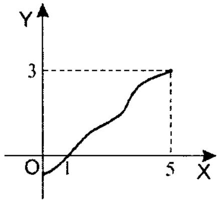

Рис. 116

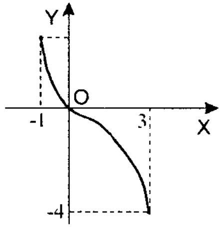

Рис. 117

2)–6), 8) аналогично 1), 7).

7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$. Решение: $y' = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x-3)(x+2)$.

Откуда $y' > 0$ при $x > 3$ и $x < -2$ и $y' < 0$ при $-2 > x > 3$.

Ответ: функция возрастает при $x > 3$ и $x < -2$ и убывает при $-2 > x > 3$.

901. Построить эскиз графика непрерывной функции $f(x)$, определенной на отрезке [a; b], если:

1) $a = 0, b = 5, f'(x) > 0$ при $0 < x < 5, f(1) = 0, f(5) = 3$.

Решение: так как $f'(x) > 0$ на (0; 5), то функция $f(x)$ возрастает (см. рис. 116).

2) $a = -1, b = 3, f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3, f(0) = 0, f(3) = -4$.

Решение: так как $f'(x) < 0$, то на (–1; 3) функция убывает. График $f(x)$ проходит через точки (0; 0) и (3; –4). См. рис. 117.

Найти интервалы возрастания и убывания функции **(902–905)**.

902. 1) $y = \dfrac{1}{x+2}$. Решение: $y' = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$, т.е. $y' < 0$ при $x \neq -2$.

Ответ: функция убывает при $x < -2$ и $x > -2$.

2) Указание: $y' = -\dfrac{2}{x^2}$, аналогично 1).

3) $y = -\sqrt{x-3}$. Решение: область определения функции $x \geq 3$. Тогда $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$, т.е. $y' < 0$ при $x > 3$. Ответ: функция убывает при $x > 3$.

4) Указание: область определения функции $x \geq 5$, тогда $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{x-5}}$, аналогично 3).

903. 1) Указание: $y' = \dfrac{3x^2(x^2+3) - 2x^3 \cdot x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$. См. задачу 902 п.1).

2) $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$. Решение: $y = \dfrac{-16+10x-x^2}{x^2}$, тогда

$$y' = \frac{(10+2x)x^2 - 2x(-16+10x-x^2)}{x^4} = \frac{10x-2x^2+32-20x+2x^2}{x^3} = \frac{32-10x}{x^3}.$$

$y' > 0$ при $0 < x < 3{,}2$ и $y' < 0$ при $x < 0$ и $x > 3{,}2$.

Ответ: функция возрастает при $0 < x < 3{,}2$ и убывает при $x < 0$ и $x > 3{,}2$.

3) Указание: $y' = e^{3x} + (x-1) \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(3x-2)$, аналогично 2).

4) Указание: $y' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x}(1-3x)$, аналогично 2).

904. 1) $y = e^{x^2+3x}$. Решение: $y' = (x^2+3x)' e^{x^2+3x} = (2x+3) \cdot e^{x^2+3x}$. Так как $e^{x^2+3x} > 0$ при всех x, то $y' > 0$ при $x > -1{,}5$ и $y' < 0$ при $x < -1{,}5$.

Ответ: функция возрастает при $x > -1{,}5$ и убывает при $x < -1{,}5$.

2) Аналогично 1).

905. 1) Указание: $y' = 1 - 2\cos 2x$. Таким образом $y' > 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x < 1$ и $y' < 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x > 1$. Аналогично 2).

2) $y = 3x + 2\cos 3x$. Решение: $y' = 3 - 6\sin 3x$. Т.е. $y' > 0 \Leftrightarrow \sin 3x < 1/2$,

откуда $\dfrac{-7\pi}{6} + 2\pi k < 3x < \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$, т.е. $\dfrac{-7\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3} < x < \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Аналогично $y' < 0 \Leftrightarrow \sin 3x > 1/2 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3} < x < \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: функция возрастает при $\dfrac{-7\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3} < x < \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}$;

функция убывает при $\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3} < x < \dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

906. Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2, b = 6, f(-2) = -1, f(6) = 5, f(3) = 0;$

$f'(3) = 0; f'(x) > 0$ при $-2 < x < 3$; $f'(x) < 0$ при $3 < x < 6$.

Решение: так как на отрезке [–2; 6] всюду существует производная $f'(x)$, то функция принимает на [–2; 6] конечные значения. Кроме того, $f(x)$ возрастает при $-2<x<3$ и убывает при $3<x<6$, но $f(3)<f(6)$, а это противоречит тому, что $f(x)$ убывает при $3<x<6$.

Ответ: такой функции на существует.

2) Аналогично задаче 901 (см. рис. 118)

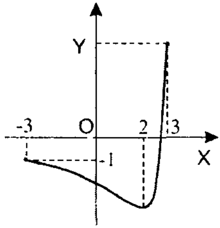

Рис. 118

907. При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y=x^3-ax$. Решение: $y'=3x^2-a$. Необходимо $3x^2-a\geq 0$ при всех x, т.е. $a\leq 0$. Ответ: $a\leq 0$.

2) Указание: аналогично 1), необходимо $a-\cos x\geq 0$ при всех x.

908. При каких значениях a функция $y=x^3-2x^2+ax$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение: $y'=3x^2-4x+a$, необходимо $y'>0$ при всех $x\in\mathbf{R}$. Это выполняется, если $D=16-12a\leq 0$, т.е. $a\geq\frac{4}{3}$. Ответ: $a\geq\frac{4}{3}$.

909. При каких значениях a функция $y=ax^3+3x^2-2x+5$ убывает на всей числовой прямой?

Решение: $y'=3ax^2+6x-2$. Необходимо $y'<0$ при всех $x\in\mathbf{R}$. Это выполняется, если $a<0$ и $D=36+24a\leq 0$, т.е. $a\leq -1{,}5$. Ответ: $a\leq -1{,}5$.

§50. Экстремумы функции

Основные понятия:

Точка x_0 называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$. Точки минимума и максимума называются *экстремальными* точками.

Теорема 1

Если x_0 – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

а) если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$;

б) если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

910. Ответ: $x_0 = -5, x_0 = 1, x_0 = 5$ – точки максимума, $x_0 = -2, x_0 = 3$ – точки минимума.

911. Ответ: $x_0 = -7$, $x_0 = -4$, $x_0 = -3$, $-2 \le x_0 \le -1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 3$ и $x_0 = 4$ – критические точки.

912. Найти стационарные точки функции.

1), 2) аналогично 3) и 4).

3) $y = e^{2x} - 2e^x$. Решение: необходимо решить уравнение $y' = 0$, то есть $2e^{2x} - 2e^x = 0$; $2e^x(e^x - 1) = 0$. Т.к. $e^x > 0$, то уравнение равносильно уравнению $e^x = 1$, $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) $y = \sin x - \cos x$. Решение: необходимо решить уравнение $y' = 0$, т.е. $\sin x + \cos x = 0$; $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

913. Найти стационарные точки функции.

1) $y = \frac{2 + x^2}{x}$. Решение: область определения функции $x \ne 0$. Тогда $y' = \frac{2x \cdot x - (2 + x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$. Т.е. $y' = 0$ при $x = \pm\sqrt{2}$. Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

2) Аналогично 1).

3) $y = e^{x^2 - 1}$. Решение: $y' = (x^2 - 1)' e^{x^2 - 1} = 2xe^{x^2 - 1}$. Таким образом $y' = 0$ равносильно $x = 0$. Ответ: $x = 0$.

4) Аналогично 3).

914. Найти точки экстремума функции.

1) $y = 2x^2 - 20x + 1$. Решение: $y' = 4x - 20$, т.е. $y' = 0$ при $x_0 = 5$. Так как $y' < 0$ при $x < 5$ и $y' > 0$ при $x > 5$, то $x_0 = 5$ – действительно точка экстремума (точка минимума). Ответ: $x_0 = 5$.

2) Аналогично 1).

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$. Решение: $y' = \frac{1}{5} - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{5x^2}$, т.е. $y' = 0$ при $x = \pm 5$. Аналогично п.1) убеждаемся, что это действительно экстремальные точки.

4) Аналогично 3).

915. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках.

1) $y = x^3 - 3x^2$. Решение: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Т.е. точки экстремума $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$ (это действительно точки экстремума, т.к. при переходе через них производная меняет знак). $y(0) = 0$ и $y(2) = -4$.

Ответ: $x_0 = 0$, $y(0) = 0$; $x_0 = 2$, $y(2) = -4$.

2) Аналогично 1).

3) $y = x + \sin x$. Решение: $y' = 1 + \cos x \geq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, т.е. точек экстремума нет.

4) $y = 2\cos x + x$. Решение: $y' = -2\sin x + 1$. $y' = 0$ при $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ – это точки экстремума (при переходе через них производная меняет знак). Если k – нечетное, то $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $y = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Если k – четное, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, y = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ответ:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ y = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

916. Имеет ли точки экстремума функция:

1)–3) Указание: производная нигде не обращается в нуль, аналогично 4).

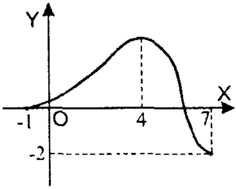

Рис. 119

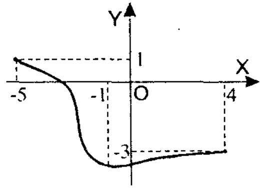

Рис. 120

4) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$. Решение: по теореме 1 в точке экстремума $y' = 0$, но $y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Т.е. точки экстремума нет. Ответ: не имеет

917. Указание: аналогично задачам 901 и 906.

1) См. рис.119.

2) См. рис. 120.

918. Найти критические точки функции.

1) $y = \sqrt{2-3x^2}$. Решение: $y' = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$. $y' = 0$ при $x = 0$, кроме того y' не существует, если $2 - 3x^2 = 0$, т.е. $x = \pm\sqrt{2/3}$. Ответ: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2/3}$.

2) Аналогично 1).

3) Аналогично 4).

4) $y = x^2 - |x| - 2$. Решение: при $x > 0$ $y = x^2 - x - 2$, т.е. $y' = 2x - 1$. При $x = 1/2$ $y' = 0$, т.е. $x = 1/2$ – критическая точка. При $x < 0$ $y = x^2 + x - 2$, $y' = 2x + 1$, т.е. $x = -1/2$ тоже критическая точка. Т.к. справа и слева от точки $x = 0$ производная принимает разные значения, то в точке $x = 0$ производной не существует. Т.е. $x = 0$ – критическая точка. Ответ: $x = 0$, $x = \pm 1/2$.

919. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x + \sqrt{3-x}$. Решение: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Т.е. $y' = 0$ если $\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 1$;

$2\sqrt{3-x}=1$; $\sqrt{3-x}=\frac{1}{2}$; $3-x=\frac{1}{4}$, $x=2{,}75$. Это точка экстремума, т.к. при переходе через нее производная меняет знак. Ответ: $x=2{,}75$.

2) Указание: $y'=\frac{6}{7}(x-1)^{-1/7}$, а $\frac{6}{\sqrt[7]{x-1}}>0$ на всей области определения функции.

3) Аналогично задаче 915 п.4).

4) Аналогично задаче 915 п.3).

920. 1) Указание: $y'=\frac{-3(2-x)^2(3-x)^2+2(3-x)(2-x)^3}{(3-x)^4}=$

$=\frac{(2-x)^2(3x-9+4-2x)}{(3-x)^3}=\frac{(2-x)^2(x-5)}{(3-x)^3}$, т.е. $x_0=5$ – точка экстремума.

2) Указание: $y'=\frac{(3x^2+4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3+2x^2)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2-4x}{(x-1)^3}=$

$=\frac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}$, т.е. $x_0=0$, $x_0=4$ и $x_0=-1$ – точки экстремума.

3) Указание: $y'=3(x-1)e^{3x}+e^{3x}=(3x-2)e^{3x}$.

4) Указание: $y'=\cos x+\cos 2x=\cos x+2\cos^2 x-1=(\cos x+1)(2\cos x-1)$.

Точки $x=2\pi k, k\in\mathbf{Z}$ не являются экстремальными, т.к. при переходе через них производная не меняет знак.

5) Указание: $y'=\left(\sqrt{3-x^2}\right)'e^{\sqrt{3-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}e^{\sqrt{3-x^2}}$.

6) Указание: $y'=\frac{1}{2\sqrt{e^x-x}}\cdot\left(e^x-x\right)'=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-1}}$.

921. Построить эскиз графика функции $y=f(x)$, непрерывной на $[a;\ b]$, если:

1) $a=-6, b=6; f(-6)=-6, f(6)=1; f'(x)>0$ при $-6<x<-4, f'(x)<0$ при $-4<x<-1, 4<x<6, f'(-4)=0, f'(-1)=0, f'(4)=0$. Решение: из условия следует, что точки $x_0=-4$ и $x_0=4$ – точки максимума, а $x_0=-1$ – точка минимума. Примерный вид графика изображен на рис. 121.

2) Аналогично 1). См. рис. 122.

922. Исследовать на экстремум функцию $y=(x+1)^n e^{-x}$, где n – натуральное

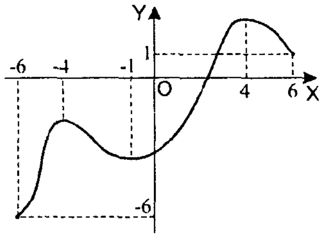

Рис. 121

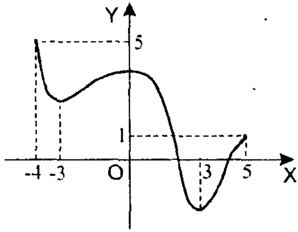

Рис. 122

число. Решение: $y' = n(x+1)^{n-1}e^{-x} - (x+1)^n e^{-x} = (x+1)^{n-1}e^{-x}(n-x-1) =$
$= (x+1)^{n-1}e^{-x}((n-1)-x)$. Нули производной – точки $x_0 = -1$ и $x_0 = n-1$. Если $n = 2k+1$, то при переходе через точку $x_0 = -1$ производная знак не меняет, следовательно $x_0 = -1$ не является экстремумом, а точка $x_0 = n-1$ – точка максимума. Если $n = 2k$, то $x_0 = -1$ – точка минимума, а $x_0 = n-1$ – точка максимума. Ответ: $x_0 = n-1$ – точка максимума и если n четно, то $x_0 = -1$ – точка минимума.

§51. Применение производной к построению графиков функций

924. Аналогично задачам 906, 921.

1) См. рис. 123.
2) См. рис. 124.

925. См. рис. 125.

926. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Решение: область определения функции $x \in \mathbf{R}$. Найдем экстремальные точки: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, т.е. $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$.

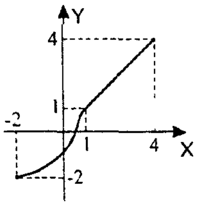

Рис. 123

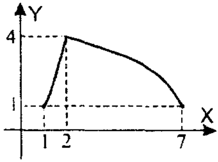

Рис. 124

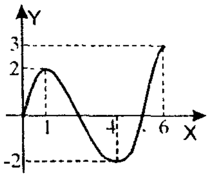

Рис. 125

Таблица 2

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$	$x=3$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	+
$f(x)$	↗	4 (max)	↘	0 (min)	↗	4

Строим таблицу (см. табл. 2). Эскиз графика на рис. 126.

2) Указание: $y' = -3x^2 + 3$; $x_0 = 1$ – точка максимума, $x_0 = -1$ – точка минимума.

3) Указание: $y' = -3x^2 + 8x - 4 = 0$ при $x_0 = 2$ и $x_0 = -2/3$. $x_0 = 2$ – точка максимума, $x_0 = -2/3$ – точка минимума.

4) Указание: $y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+3)(x+1)$, $x_0 = -3$ – точка максимума, $x_0 = -1$ – точка минимума.

927. 1) Указание: $y = -(x^2 - 4)^2$; $y' = -4x(x^2 - 4)$. См. рис. 127.

2) Указание: $y = (x^2 - 1)^2 + 1$; $y' = 4x(x^2 - 1)$. См. рис. 128.

3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$. Решение: область определения функции $x \in \mathbf{R}$. Най-

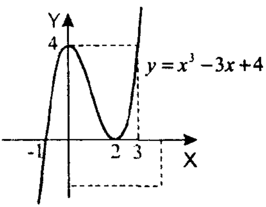

Рис. 126

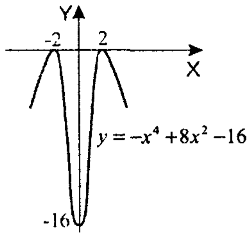

Рис. 127

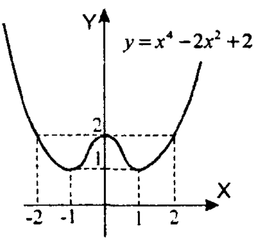

Рис. 128

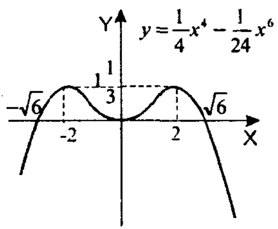

Рис. 129

дем точки пересечения графика с осью OX: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 = 0$,

$\frac{1}{24}x^4(6 - x^2) = 0$, откуда $x = 0$, $x = \pm\sqrt{6}$. $y' = x^3 - \frac{1}{4}x^5 = \frac{1}{4}x^3(4 - x^2)$.

Строим таблицу (табл. 3).

Таблица 3.

x	$x=-\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$2<x<\sqrt{6}$	$x=\sqrt{6}$
$f'(x)$	+	+	0	–	0	+	0	–	–
$f(x)$	0	↗	$1\frac{1}{3}$ (max)	↘	0 (min)	↗	$1\frac{1}{3}$ (max)	↘	0

Эскиз графика см. на рис. 129.

4) Аналогично 3).

928. 1) Указание: $y = 0$ при $x = 1, x = \pm\sqrt{3}$; $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. См. рис. 130.

2) Указание: $y = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$, следовательно $y = 0$ при $x = \pm 3$ и $x = \pm 1$. См. рис. 131.

929. Указание: точки экстремума – нули функции $g(x)$.

930. Аналогично задачам 926, 927.

931. 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$. Решение: область определения функции $x \neq 0$. Найдем нули функции: $3x = -\frac{1}{3x}$; $9x^2 + 1 = 0$, т.е. график функции не пересекает ось OX. $y' = 3 - \frac{1}{3x^2} = \frac{9x^2 - 1}{3x^2}$, т.е. $x = \pm\frac{1}{3}$ – точки экстремума.

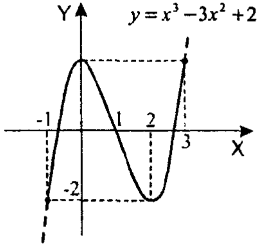

Рис. 130

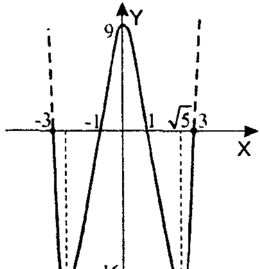

Рис. 131

Таблица 4

x	$x<-1/3$	$x=-1/3$	$-1/3<x<0$	$0-0$	$0+0$	$0<x<1/3$	$x=1/3$	$x>1/3$
$f'(x)$	+	0	–	–	–	–	0	+
$f(x)$	↗	–2	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	2	↗

Строим таблицу (см. табл. 4). Эскиз графика на рис. 132.

2) Аналогично 1).

3) Указание: область определения функции $x>0$. Найдем нули функции:

$x=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x^2=\frac{1}{x}$, $x^3=1$, т.е. $x=1$. $y'=1+\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2x\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}$. $y'>0$ при всех $x>0$. См. рис. 133.

932. 1) $y=xe^{-x}$. Решение: область определения функции $x\in\mathbf{R}$. $y=0$ при $x=0$. $y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$. Строим таблицу (см. табл. 5). Эскиз графика на рис. 134.

Таблица 5

x	$x\to-\infty$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$	$x\to+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	–	–
$f(x)$	$-\infty$	0	↗	$1/e$	↘	0

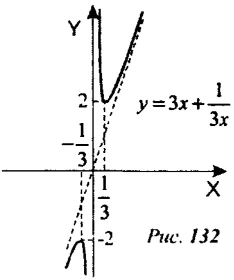

Рис. 132

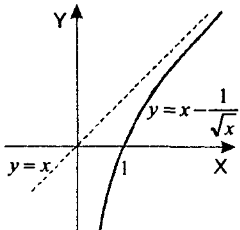

Рис. 133

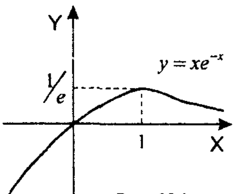

Рис. 134

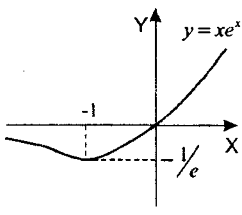

Рис. 135

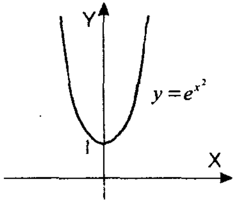

Рис. 136

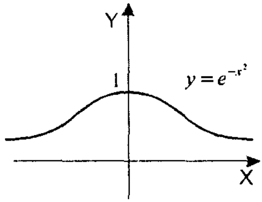

Рис. 137

2) Аналогично 1). См. рис. 135.
3) Аналогично 4). См. рис. 136.

4) $y=e^{-x^2}$. Решение: область определения функции $x\in\mathbf{R}$. $y>0$ при всех x. $y'=-2xe^{-x^2}$. $y'=0$ при $x=0$. Строим таблицу (см. табл. 6). Эскиз графика на рис. 137.

Таблица 6

x	$x\to-\infty$	$x<0$	$x=0$	$x>0$	$x\to+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	–	–
$f(x)$	↗	↗	1	↘	↘

933. 1) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. Решение: область определения функции $x\neq 2$. $y=0$ при $x=0$. $y'=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Корни производной $x_0=0$ и $x_0=4$.

Исследуем поведение функции при $x\to\infty$:

$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{x^2-2x+2x}{x-2}=x+\frac{2x}{x-2}=$$

$$=x+\frac{2(x-2)+4}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2},$$ т.е. при $x\to\infty$ функция стремится к $x+2$. Эскиз графика изображен на рис. 138.

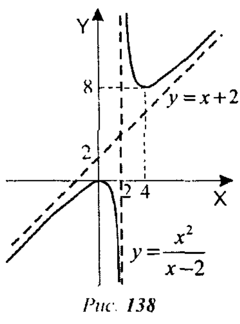

Рис. 138

2) Указание: аналогично 1), $y=-x+3-\dfrac{1}{x}$, т.е. при $x\to\infty$ $y\to 3-x$.

3) $y=\dfrac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$. Решение: область опре-

деления функции $x \neq 2$. $y = 0$ при $2x^2 - x - 4 = 0$, т.е. $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. Исследуем функцию при $x \to \infty$: $y = \frac{-2(x-2)^2 - 3x + 12}{(x-2)^2} = -2 + \frac{12 - 3x}{(x-2)^2}$, т.е. при $x \to \infty$ $y \to -2$. Строим таблицу (см. табл. 7). График см. на рис. 139.

Таблица 7

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7} < x < \frac{1-\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{33}}{4} < x < 2$	$x = 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	–	0	–	–	–	нет	+
$f(x)$	–2	0	↗	$\frac{33}{8}$	↘	0	↘	нет	–2

934. Найти число действительных корней уравнения.

1) $x^4 - 4x^3 + 20 = 0$. Решение: исследуем $f(x) = x^4 - 4x^3 + 20 = 0$ на экстремум. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Т.е. $x_0 = 3$ – точка минимума. $f(3) = -7 < 0$, но при $x \to \infty$ $f(x) \to \infty$, поэтому существует два действительных корня. Ответ: два корня.

2) Аналогично 1).

935. Построить график функции $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = C$ при различных значениях C?

Решение: О.О.Ф. $x \neq 1$. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = 1$. Исследуем функцию на экстре-

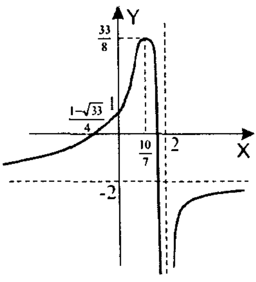

Рис. 139

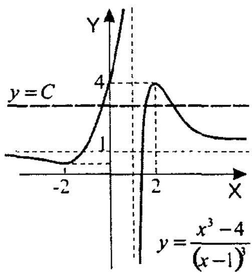

Рис. 140

мум: $y' = \frac{3x^2(x-1)^3 - 3(x^3-4)(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x^3 + 12}{(x-1)^4} =$

$= \frac{3(2-x)(2+x)}{(x-1)^4}$. Построим таблицу (см. таблицу 8).

Таблица 8

x	$-\infty$	$x=-2$	$-2<x<1$	$1-0$	$x=1$	$1+0$	$1<x<2$	$x=2$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	+	нет	+	+	0	–
$f(x)$	1	4/9	↗	$+\infty$	нет	$-\infty$	↗	4	1

Теперь можно построить график функции (рис. 140) и выяснить, сколько пересечений он имеет с прямой .

Ответ: $C>4$ – уравнение имеет один корень, $C=4, C=1$ – два корня, $\frac{4}{9}>C>4$ – три корня, $C=\frac{4}{9}$ – два корня, $C<\frac{4}{9}$ – один корень.

§52. Наибольшее и наименьшее значение функции

937. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x^3+3x^2-36x$.

1) на отрезке [–4; 3]. Решение: найдем экстремальные точки: $f'(x)=6x^2+6x-36= \;=6(x-2)(x+3)$. То есть $f'(x)=0$ при $x=2$ и $x=-3$ – это экстремальные точки. $f(-4)=80$; $f(-3)=81$; $f(2)=-44$; $f(3)=-27$. Откуда минимальное значение равно –44, а максимальное равно 81. Ответ: –44 и 81.

2) Аналогично 1).

938. Найти наибольшее и наименьшее значения функции.

1), 2) Аналогично 3).

3) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Решение: найдем экстремальные точки: $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ при $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Из них в промежуток $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадает только $\frac{5\pi}{4}$.

$f(\pi)=-1$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$. Таким образом минимальное значение равно $-\sqrt{2}$, а максимальное -1. Ответ: $-\sqrt{2}$ и -1.

939. Аналогично задаче 938.

940. Указание: найдите минимум функции $f(x)=x^3+(50-x)^3$ на отрезке [0; 50]. Аналогично задаче 942.

941. Указание: найдите минимум функции $f(x)=x^2+\left(\frac{625}{x}\right)^2$ на интервале $(0;-\infty)$. Аналогично задаче 942.

942. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

Решение: пусть одна сторона прямоугольника равна x, тогда вторая сторона равна $\frac{p}{2}-x$. Тогда площадь равна $f(x)=x\cdot\left(\frac{p}{2}-x\right)$. Найдем максимум этой функции на отрезке $\left[0;\frac{p}{2}\right]$. $f'(x)=\left(\frac{p}{2}-x\right)-x=\frac{p}{2}-2x$.

$f'\left(p/4\right)=0$ и в этой точке достигается минимум. Ответ: квадрат со стороной $p/4$.

943. Аналогично задаче 942.

944. Аналогично задачам 937 и 938.

945. Найти наибольшее значение функции.

1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ при $x>0$. Решение: $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{3-3x}{2\sqrt{x}}$. Т.е. $x_0=1$ – точка максимума. $f(0)=0$; $f(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$, поэтому наибольшее значение равно $f(1)=2$. Ответ: 2.

2) Аналогично 1).

946. Аналогично 945.

947. Найти наибольшее значение функции.

1), 2), 4) аналогично 3).

3) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале (0; 1). Решение: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x^2(1-x)}=0$, $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x^2(1-x)}=0$. Точки экстремума: $\left(\sqrt[3]{x^2(1-x)}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2(1-x)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(x^2(1-x)\right)'=$

$=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\left(2x(1-x)-x^2\right)=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\left(2x-3x^2\right)$, т.е. критические точки $x=0$ и $x=2/3$. $f\left(2/3\right)=\sqrt[3]{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ – это наибольшее значение.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

948. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(x)=x(a-2x)^2$ на промежутке $\left[0; \frac{a}{2}\right]$.

949. Указание: найдите наименьшее значение функции $f(x)=(x+a)\cdot\frac{a^2}{2x}$ при $x>0$.

950. Указание: найдите наибольшее значение функции площади $f(x)=2x\left(3-x^2\right)$ при $x>0$.

951. Найдите на пораболе $y=x^2$ точку, ближайшую к точке A $(2; 0,5)$.

Решение: рассмотрим функцию расстояния от точки A до точки пораболы с координатами $\left(x; x^2\right)$: $f(x)=\sqrt{(2-x)^2+\left(0,5-x^2\right)^2}$, определенную при всех $x\in\mathbf{R}$. Тогда

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(2-x)^2+\left(0,5-x^2\right)^2}}\cdot\left(-2(2-x)-4x\left(0,5-x^2\right)\right)=\frac{2\left(x^3-1\right)}{\sqrt{(2-x)^2+\left(0,5-x^2\right)^2}}.$$

$f'(x)=0$ при $x=1$ – точка минимума.

Т.е. исходная точка имеет координаты (1; 1). Ответ: (1; 1).

952. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(\varphi)=a^2\sin\varphi(1+\cos\varphi)$ на отрезке $[0;\pi]$ (см. рис. 141).

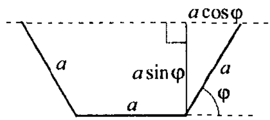

Рис. 141

§53. Выпуклость графика функции, точки перегиба

953. Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x)=x^2\cos x$. Решение: $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$. Тогда:

$$f''(x)=\left(2x\cos x-x^2\sin x\right)'=2\cos x-2x\sin x-x^2\cos x-2x\sin x=$$

$=2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$. Ответ: $2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$.

2)–4) аналогично 1).

954. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$.

1) $f(x)=(x+1)^4$. Решение: $f'(x)=4(x+1)^3$, $f''(x)=12(x+1)^2$, т.е. $f''(x)\geq 0$ при всех x, т.е. $f(x)$ выпукла вниз при всех $x\in\mathbf{R}$. Ответ: $x\in\mathbf{R}$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x)=(x^2-3x+2)\cdot e^x$. Решение: $f'(x)=(2x-3)\cdot e^x+(x^2-3x+2)\cdot e^x=$ $=(x^2-x-1)\cdot e^x$, $f''(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x+2)(x-1)e^x$. Т.е. $f''(x)>0$ при $x>1$ и $x<-2$; и $f''(x)<0$ при $-2<x<1$.

Ответ: выпукла вниз при $x>1$ и $x<-2$; и выпукла вверх при $-2<x<1$.

4) Указание: $f''(x)=(3x^2-6\ln x-6)'=6x-\dfrac{6}{x}$.

955. Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:

1) $f(x)=\cos x$. Решение: $f''(x)=-\cos x$. Т.е. $f''(x)=0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. в этих точках $f''(x)$ меняет знак, то $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ – точки перегиба. Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 3).

3) $f(x)=12x^3-24x^2+12x$. Решение: $f''(x)=72x-48=24(3x-2)$. Т.е. $x=2/3$ – точка перегиба. Ответ: $x=2/3$.

4) Указание: $f''(x)=-\sin x+2\sin 2x=2\sin x(2\cos x-1)$.

Упражнения к главе IX

956. Аналогично задачам 900 и 902.

957. 1) Указание: $y'=4x^3-12x^2-16x=4x(x^2-3x-4)=4x(x-4)(x+1)$.

2) Указание: $y'=16x^3-4x=4x(4x^2-1)=4x(2x-1)(2x+1)$.

3) Указание: $y'=\dfrac{1}{3}-\dfrac{12}{x^2}=\dfrac{(x-6)(x+6)}{3x^2}$.

4) Указание: $y'=-\dfrac{2}{(x-3)^2}$.

958. Найти точки экстремума функции:

1) $y=x^3-4x^2$. Решение: $y'=3x^2-8x=x(3x-8)$. $x=0$ и $x=8/3$ – точки экстремума (т.к. в них производная меняет знак). Ответ: $x=0$ и $x=4$.

2) Аналогично 1).

959. Аналогично задачам 958 и 915.

960. 1) $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2$. Решение: область определения функции $x\in\mathbf{R}$. График функции пересекает ось OX в точках $x=0$ и $x=-9$. $y'=x^2+6x=x(x+6)$, т.е. $x=0$ и $x=-6$ – точки экстремума. Строим таблицу (см. табл. 9).

Таблица 9

x	$x<-6$	$x=-6$	$-6<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	36 (max)	↘	0 (min)	↗

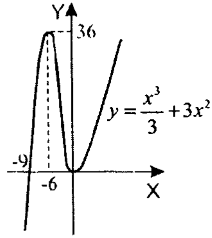

Рис. 142

Эскиз графика см. на рис. 142.

2) Аналогично 1).

961. Аналогично задаче 928.

962. Найти наибольшее и наименьшее значение функции.

1) $f(x)=x^3-6x^2+9$ на отрезке $[-2;\ 2]$. Решение: $f(-2)=-23$, $f(2)=-7$. Найдем значение в экстремальных точках: $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$, $f(0)=9$. Ответ: –23 и 9.

2)–4) Аналогично 1).

963. Указание: пусть периметр имеет длину $2p$, тогда по теореме Пифагора $d_x=\sqrt{x^2+(p-x)^2}$, где x – длина одной стороны. Найдите наименьшее $d(x)$, $x\in[0;\ p]$.

964. Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

Решение: пусть x – длина боковой стороны, тогда основание имеет длину $p-2x$. Длина высоты, опущенной на основание равна

$\sqrt{x^2-\left(\frac{p-2x}{2}\right)^2}=\sqrt{px-\frac{p^2}{4}}$. Тогда площадь треугольника равна

$S(x)=\frac{1}{2}(p-2x)\sqrt{px-\frac{p^2}{4}}$. Найдем максимум $S(x)$ при $x\in\left[0;\ {}^{p}\!/_{2}\right]$.

$S(0)=0$, $S\left({}^{p}\!/_{2}\right)=0$.

$$S'(x)=-\sqrt{px-\frac{p^2}{4}}+\frac{1}{2}(p-2x)\frac{p}{2\sqrt{px-{}^{p^2}\!/_{4}}}=\frac{-4\left(px-{}^{p^2}\!/_{4}\right)+p(p-2x)}{4\sqrt{px-{}^{p^2}\!/_{4}}}=$$

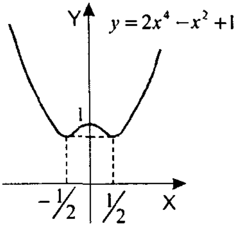

Рис. 143

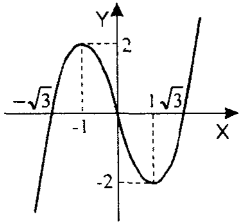

Рис. 144

$=\dfrac{p^2-3px}{2\sqrt{px-\frac{p^2}{4}}}$, т.е. $S'(x)=0$ при $x=\frac{p}{3}$ – это точка максимума, т.е. наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Ответ: равносторонний треугольник.

965. Аналогично задаче 964.

Проверь себя!

1. Аналогично задачам 900 и 902.
2. Аналогично задаче 958.
3. 1) См. рис. 143; 2) См. рис. 144.
4. Аналогично задаче 962.
5. Аналогично задаче 964.

966. Доказать, что функция $y=1{,}8x^5-2\frac{1}{3}x^3+7x+12{,}5$ возрастает на всей области определения.

Решение: Найдем производную $y'=9x^4-2x^2+7=9u^2-2u+7$, где $u=x^2$. Но $9u^2-2u+7>0$ при всех u, т.к. $D<0$. Т.е. $y'>0$ при всех x, следовательно функция возрастает при всех x, ч.т.д.

967. Аналогично задаче 966.

968. 1) Указание: $y'=\ln x+1$.

2) Указание: $y'=xe^x+e^x=e^x(x+1)$.

3) Указание: $y'=\dfrac{25}{(7-x)^2}-\dfrac{9}{(3-x)^2}=\dfrac{8(2x-9)(x+3)}{(7-x)^2(3-x)^2}$.

969. Указание: $f(x)$ возрастает на промежутках, где $g(x)>0$, убывает на промежутках, где $g(x)<0$. Точки экстремума функции $f(x)$ – нули функции $g(x)$ (т.к. в этих точках функция $g(x)$ меняет знак). Точки перегиба функции $f(x)$ соответствуют экстремумам функции $g(x)$.

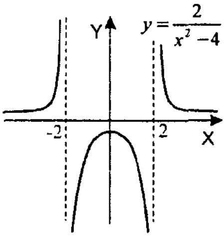

Рис. 145

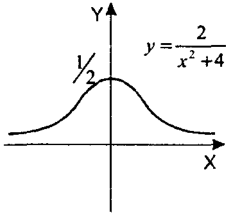

Рис. 146

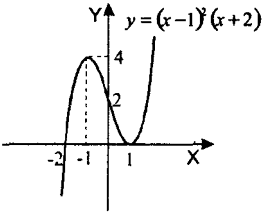

Рис. 147

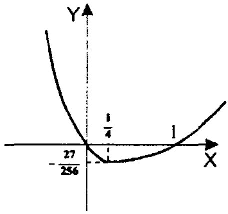

Рис. 148

970. 1) $y=\frac{2}{x^2-4}$. Решение: О.О.Ф. $x\neq\pm2$. $y'=-\frac{4x}{(x^2-4)^2}$, т.е. $x_0=0$ – точка максимума, $f(0)=-\frac{1}{2}$. Эскиз графика – рис. 145.

2) Аналогично 1). См. рис. 146.

3) Указание: $y'=2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=3(x-1)(x+1)$, точка $x_0=1$ – точка минимума, $x_0=-1$ – точка максимума. См. рис. 147.

4) Указание: $y'=3x(x-1)^2+(x-1)^3=(x-1)^2(4x-1)$, точка $x_0=\frac{1}{4}$ – точка минимума. См. рис. 148.

971. Аналогично задаче 938.

972. Указание: скорость тела $v(t)=S'(t)=12t-3t^2$. Найдите наибольшее значение этой функции при $t\geq0$.

973. Указание: пусть длина катета x, тогда длина другого катета равна $\sqrt{(l-x)^2-x^2}=\sqrt{l^2-2lx}$, а площадь треугольника $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{l^2-2lx}$. Найдите наибольшее значение функции $S(x)$ на промежутке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

974. Указание: найдите наибольшее значение $S(x)=\frac{(40-x)\cdot x}{2}$ на [0; 40].

975. Сумма диагоналей параллелограмма равна a. Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

Решение: известно, что сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей. Т.е. необходимо найти наименьшее значение функции $f(x)=x^2+(a-x)^2$ на отрезке $[0;\ a]$. $f'(x)=2x-2(a-x)=4x-2a$.

$f(0)=a^2$, $f(a)=a^2$, $f\left(a/2\right)=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$, т.е. наименьшее значение

$\frac{a^2}{2}$. Ответ: $\frac{a^2}{2}$.

976. Указание: найдите наибольшее значение функции $f(x)=2x\sqrt{R^2-x^2}$ на отрезке $[0;\ R]$.

977. Указание: наибольший объем имеет пирамида, в основании которой лежит треугольник наибольшей площади. См. задачу 973.

978. Указание: объем цилиндра равен $V(x)=\pi x^2\left(\frac{p}{2}-2x\right)$. Найдите наибольшее значение этой функции на отрезке $\left[0;\ \frac{p}{4}\right]$.

979. Аналогично задаче 948.

980. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. Решение:

$$y'=\frac{(2x-3)(x^2+3x+2)-(2x+3)(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)^2}=\frac{6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)^2(x+1)^2}.\qquad y'=0$$

при $x=\pm\sqrt{2}$. В этих точках производная меняет знак, т.е. это точки экстремума. Ответ: $x=\pm\sqrt{2}$.

981. 1) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$. Решение: О.О.Ф. $x\geq -1$. Функция обращается в нуль при $x=\pm 1$. Найдем производную: $y'=2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2-1}{2\sqrt{x+1}}=$

$$=2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2-1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{4x(x+1)+x^2-1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{5x^2+4x-1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{(5x-1)(x+1)}{2\sqrt{x+1}}.$$ Т.е.

$y'=0$ при $x=1/5$ – это точка минимума. Эскиз графика на рис. 149.

2) $y=|x|\cdot\sqrt[3]{1+3x}$. Решение: область определения функции $x\in\mathbf{R}$. Функция обращается в нуль при $x=0$ и $x=-1/3$. Найдем производную :

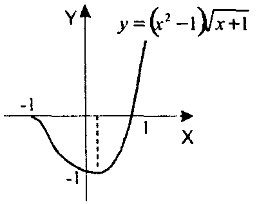

Рис. 149

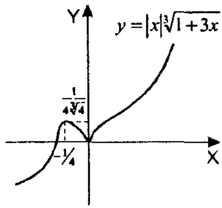

Рис. 150

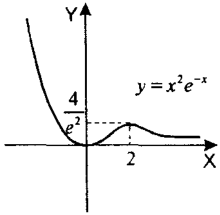

Рис. 151

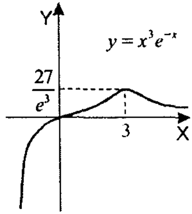

Рис. 152

$$y'=\begin{cases}-x\sqrt[3]{1+3x}, x<0\\ x\sqrt[3]{1+3x}, x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt[3]{1+3x}-\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, x<0\\ \sqrt[3]{1+3x}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, x<0\\ \dfrac{1+4x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}, x\ge 0\end{cases}$$

Таким образом, $y'=0$ при $x=-1/4$ – это точка максимума (производная меняет знак). $y(-1/4)=\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$. Эскиз графика на рис. 150.

3) Указание: $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$. Откуда $x=0$ – точка минимума, а $x=2$ – точка максимума. См. рис. 151.

4) Указание: $y'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x)$. Точка $x=0$ не является точкой экстремума, а $x=3$ – точка максимума. См. рис. 152.

982. Указание: для того, чтобы сдвинуть груз, необходимо, чтобы $k(mg-F\sin\alpha)=F\cos\alpha$, т.е. $kmg=F(\cos\alpha+k\sin\alpha)$, $F(\alpha)=\frac{kmg}{\cos\alpha+k\sin\alpha}$.

Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Глава X
Интеграл

§54. Первообразная

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

983. 1) $F(x)=\dfrac{x^6}{6}$; $f(x)=x^5$. Решение: $F'(x)=\dfrac{6x^5}{6}=x^5=f(x)$ для всех $x\in\mathbf{R}$

2) $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$; $f(x)=x^4$. Решение: $F'(x)=\dfrac{5x^4}{5}=x^4=f(x)$ для всех $x\in\mathbf{R}$

984. 1) $F(x)=\dfrac{2}{x}$; $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}$. Решение: $F'(x)=\left(2x^{-1}\right)'=-\dfrac{2}{x^2}=f(x)$ для $x>0$

2) $F(x)=1+\sqrt{x}$; $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Решение: $F'(x)=\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$ для всех $x>0$.

985. 1) x^4. Решение: подберем функцию $F(x)$ так, чтобы $F'(x)=x^4$. Тогда все первообразные функции x^4 имеют вид $F(x)+C$, где C – любое действительное число. Например, $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$. Ответ: $\dfrac{x^5}{5}+C,\ C\in\mathbf{R}$.

2) x^3. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+C,\ C\in\mathbf{R}$.

3) x^{-3}. $F(x)=\dfrac{-x^{-2}}{2}+C,\ C\in\mathbf{R}$.

4) $x^{-\frac{1}{2}}$. $F(x)=2x^{\frac{1}{2}}+C,\ C\in\mathbf{R}$.

986. 1) $f(x)=x,\ M(-1;3)$. Решение: найдем первообразные функции $f(x)$:

$f(x)=x=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'$, т.е. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+C$. Тогда $F(-1)=\dfrac{(-1)^2}{2}+C=3$,

$C = 2{,}5$. Ответ: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2{,}5$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$, М (9; 10). Решение: найдем первообразные функции $f(x)$:

$\sqrt{x} = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'$, т.е. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$. Тогда $F(9) = 10$, $\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3 + C = 10$,

$C = -8$. Ответ: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

987. 1) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$; $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$. Решение: $F'(x) = \left(3e^{\frac{x}{3}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} = e^{\frac{x}{3}} = f(x)$

для всех $x \in \mathbf{R}$.

2) $F(x) = \sin 2x$; $f(x) = 2\cos 2x$. Решение: $F'(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x = f(x)$

для всех $x \in \mathbf{R}$.

§55. Правила нахождения первообразных

988. 1) $2x^5 - 3x^2$. Решение: по таблице одна из первообразных от x^5 равна $\frac{x^6}{6}$, от x^2 равна $\frac{x^3}{3}$, тогда $F(x) = 2\cdot\frac{x^6}{6} - 3\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{x^6}{3} - x^3$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^6}{3} - x^3$.

2) $5x^4 + 2x^3$. $F(x) = \frac{5x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} = x^5 + \frac{x^4}{2}$. Ответ: $F(x) = x^5 + \frac{x^4}{2}$.

3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$. $F(x) = 2\ln x + 3\left(-x^{-1}\right) = 2\ln x - 3x^{-1}$. Ответ: $F(x) = 2\ln x + x^3$.

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$. $F(x) = 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - 3\ln x = -\frac{1}{x^2} - 3\ln x$. Ответ: $F(x) = -\frac{1}{x^2} - 3\ln x$.

5) $6x^2 - 4x + 3$. $F(x) = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^1}{1} = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

Ответ: $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$. $F(x) = 4\cdot\frac{3\cdot x^{\frac{4}{3}}}{4} - 6\cdot\frac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} = 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}}$. Ответ: $F(x) = 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}}$

989. 1) $3\cos x - 4\sin x$. $F(x) = 3\sin x - 4(-\cos x) = 3\sin x + 4\cos x$.

2) $5\sin x + 2\cos x$. $F(x) = -5\cos x + 2\sin x$.

3) $e^x - 2\cos x$. $F(x) = e^x - 2\sin x$.

4) $3e^x-\sin x$. $F(x)=3e^x+\cos x$.

5) $5-e^{-x}+3\cos x$. $F(x)=5x+e^{-x}+3\sin x$.

6) $1+3e^x-4\cos x$. $F(x)=x+3e^x-4\sin x$.

7) $6\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}+3e^x$. Т.к. $6\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}+3e^x=6x^{1/3}-\frac{2}{x}+3\cdot e^x$, то первообразная

$F(x)=\frac{3}{4}\cdot 6x^{4/3}-2\ln x+3e^x$. Ответ: $F(x)=4{,}5\sqrt[3]{x^4}-2\ln x+3e^x$.

8) $\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^{-x}$. Т.к. $\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^{-x}=4x^{-1/2}+3\cdot\frac{1}{x}-2\cdot e^{-x}$, то первообразная $F(x)=8\sqrt{x}+3\ln x+2e^{-x}$. Ответ: $F(x)=8\sqrt{x}+3\ln x+2e^{-x}$.

990. 1) $(x+1)^4$. $F(x)=\frac{(x+1)^5}{5}$. 2) $(x-2)^3$. $F(x)=\frac{(x-2)^4}{4}$.

3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$. $F(x)=2\cdot\frac{(x-2)^{1/2}}{1/2}=4\sqrt{x-2}$.

4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}=3(x+3)^{-\frac{1}{3}}$. $F(x)=\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$.

5) $\frac{1}{x-1}+4\cos(x+2)$. $F(x)=\ln(x-1)+4\sin(x+2)$.

6) $\frac{3}{x-3}-2\sin(x-1)$. $F(x)=3\ln(x-3)+2\cos(x-1)$.

991. 1) $\sin(2x+3)$. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$.

2) $\cos(3x+4)$. $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$.

3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$. $F(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)+C$.

4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$. $F(x)=-4\cos\left(\frac{x}{4}+5\right)+C$.

5) $e^{\frac{x+1}{2}}$. $F(x)=2e^{\frac{x+1}{2}}+C$. 6) e^{3x-5}. $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x-5}+C$.

7) $\frac{1}{2x}$. $F(x)=\frac{1}{2}\ln 2x+C$. 8) $\frac{1}{3x-1}$. $F(x)=\frac{1}{3}\ln(3x-1)+C$.

992. 1) $f(x) = 2x + 3$, M (1; 2). Решение: общий вид первообразных функции $f(x)$: $F(x) = x^2 + 3x + C$. Тогда $F(1) = 1 + 3 + C = 2$, откуда $C = -2$.

Ответ: $F(x) = x^2 + 3x - 2$.

2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$. Решение: общий вид первообразных функции $f(x)$: $F(x) = 2x^2 - x + C$. Тогда $F(-1) = 2 + 1 + C = 3$, откуда $C = 0$.

Ответ: $F(x) = 2x^2 - x$.

3) $f(x) = \sin 2x$, M $(\frac{\pi}{2}; 5)$. Решение: общий вид первообразных функции $f(x)$: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, тогда $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\pi + C = 5$, откуда $C = 4{,}5$. Ответ: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 4{,}5$.

4) $f(x) = \cos 3x$, M (0; 0). Решение: общий вид первообразных функции $f(x)$: $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$, тогда $F(0) = \frac{1}{3}\sin 0 + C = 0$, откуда $C = 0$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$.

993. 1) $e^{2x} - \cos 3x$. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\sin 3x$.

2) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$. $F(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

3) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$. $F(x) = -10\cos\frac{x}{5} - \frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$.

4) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$. $F(x) = 21\sin\frac{x}{7} + \frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$.

5) Указание: $\sqrt{\frac{x}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot x^{1/2}$.

6) Указание: $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} = 4\cdot(3x+1)^{-1/2}$.

994. $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$. Решение: $f(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3} = \frac{2}{3}\cdot x^4 - \frac{4}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{3}x$, тогда $F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}$. Ответ: $\frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^2$.

2) $\frac{6x^3-3x+2}{5}$. Решение: $f(x)=\frac{6}{5}\cdot x^3-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{2}{5}$, тогда одна из первообразных $F(x)=\frac{6}{5}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5}\cdot x$. Ответ: $F(x)=0{,}3x^4-0{,}3x^2+0{,}4x$.

3) $(1+2x)(x-3)$. Решение: $f(x)=2x^2-5x-3$, тогда одна из первообразных $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x$. Ответ: $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x$.

4) $(2x-3)(2+3x)$. Решение: $f(x)=6x^2-5x-6$, тогда одна из первообразных $F(x)=\frac{6}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$. Ответ: $F(x)=\frac{6}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$.

995. 1) $(2x+1)\sqrt{x}$. Решение: $f(x)=2x^{3/2}+x^{1/2}$, тогда одна из первообразных

$$F(x)=\frac{2x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}=\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{3}x\right)\sqrt{x}.$$ Ответ: $F(x)=\left(4x^2+\frac{2}{3}x\right)\sqrt{x}$.

2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$. Решение: $f(x)=3x^{4/3}-2x^{1/3}$, тогда одна из первообразных

$$F(x)=\frac{3\cdot 3x^{7/3}}{7}-\frac{2\cdot 3x^{4/3}}{4}=\frac{9}{7}x^{7/3}-\frac{3}{2}x^{4/3}.$$ Ответ: $f(x)=\frac{9}{7}x^{7/3}-\frac{3}{2}x^{4/3}$.

3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$. Решение: $f(x)=\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}=x^{2/3}+4x^{-1/3}$, тогда одна из первообразных $F(x)=\frac{3}{5}x^{5/3}+4\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}=\frac{3}{5}x^{5/3}+6x^{2/3}$. Ответ: $F(x)=\frac{3}{5}x^{5/3}+6x^{2/3}$.

4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$. Решение: $f(x)=x^{1/2}-3x^{-1/2}$, тогда одна из первообразных

$$F(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}-3\cdot\frac{2}{1}x^{1/2}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}.$$ Ответ: $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}$.

996. 1) Указание: $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

2) Указание: $\sin x\cos 3x-\cos x\sin 3x=\sin(x-3x)=-\sin 2x$.

997. Найти первообразную функции $y=2\sin 5x+3\cos\frac{x}{2}$, которая при $x=\frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

Решение: найдем первообразную: $F(x)=-\frac{2}{5}\cos 5x+6\sin\frac{x}{2}+C$. Тогда $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, т.е. $-\frac{2}{5}\cos\frac{5\pi}{3}+6\sin\frac{\pi}{6}+C=0$, $\frac{1}{5}+3+C=0$, $C=-3{,}2$.

Ответ: $-\frac{2}{5}\cos 5x+6\cos\frac{x}{2}+-3{,}2$.

998. 1) Указание: $\frac{x}{x-3}=\frac{x-3+3}{x-3}=1+\frac{3}{x-3}=1+3\cdot\frac{1}{x-3}$.

2) Указание: $\frac{x-1}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x+2}$ при $x\neq 1$.

3) Указание: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$.

4) Указание: $\sin 3x\cos 5x=\frac{1}{2}(\sin(3x+5x)+\sin(3x-5x))=\frac{1}{2}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x$.

§56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл

$\int_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

999. 1) См. рис. 153; 2) См. рис. 154; 3) См. рис. 155; 4) См. рис. 156.

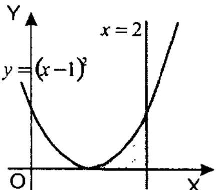

Рис. 153

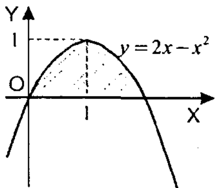

Рис. 154

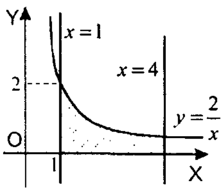

Рис. 155

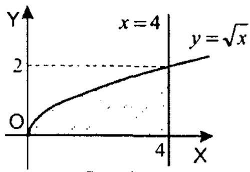

Рис. 156

1000. 1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$. Решение: искомая площадь трапеции равна $S = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 x^3 dx$. Первообразная функции $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, откуда $S = F(4) - F(2) = 64 - 4 = 60$. Ответ: $S = 60$.

2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$. Решение: $S = \int_3^4 x^2 dx = F(4) - F(3) = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{37}{3}$. Ответ: $S = 12\frac{1}{3}$.

3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$. Т.к. первообразная функции $f(x)$ равна $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$, то площадь $S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-2}^{1} = 6$. Ответ: $S = 6$.

4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$. Решение: $S = \int_0^2 (x^3 + 1)dx$, первообразная функции $f(x)$: $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$, тогда $S = F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6$. Ответ: 6.

5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$. Решение: $S = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin x dx$, первообразная $F(x) = -\cos x$, тогда $S = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ответ: 1.

6) Аналогично 5).

1001. 1) $y = 4 - x^2$. Решение: найдем точки пересечения пораболы с осью OX: $4 - x^2 = 0$, откуда $x = \pm 2$. Тогда $S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$. Первообразная функции равна $4x - \frac{x^3}{3}$, откуда $S = 4\cdot 2 - \frac{8}{3} - 4\cdot(-2) + \frac{(-2)^3}{3} = 10\frac{2}{3}$. Ответ: $10\frac{2}{3}$.

2), 3) аналогично 1).

1002. 1) Указание: аналогично задаче 1000. $S = \int_1^8 x^{1/3} dx$, $F(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$.

2) Указание: аналогично задаче 1000. $S = \int_4^9 x^{1/2} dx$, $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

1003. 1) $b = 2$, $f(x) = 5x - x^2$. Решение: см. рис. 157. Искомая площадь

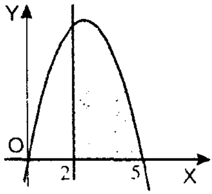

Рис. 157

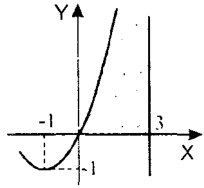

Рис. 158

$S=\int_2^5\left(5x-x^2\right)dx$. Т.к. первообразная равна $F(x)=\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, находим площадь фигуры: $S=F(5)-F(2)=\frac{125}{2}-\frac{125}{3}-10+\frac{8}{3}=13.5$. Ответ: 13,5.

2) Указание: аналогично 1), $S=\int_0^3\left(x^2+2x\right)dx$, см. рис. 158.

3) $b=1$, $f(x)=e^x-1$. Решение: найдем точку пересечения графика с осью OX: $e^x-1=0$, откуда $x=0$. Тогда $S=\int_0^1\left(e^x-1\right)dx$. Первообразная равна $F(x)=e^x-x$, тогда $S=F(1)-F(0)=e-1-1+0=e-2$. Ответ: $e-2$.

4) Указание: аналогично 3). $S=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$, $F(x)=x-\ln|x|+C$.

§57. Вычисление интегралов

1004. 1) $\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$; 2) $\int_0^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{27}{3}-0=9$;

3) $\int_{-1}^2 3x^2dx=x^3\Big|_{-1}^2=8-(-1)=9$; 4) $\int_{-2}^3 2xdx=x^2\Big|_{-2}^3=9-4=5$;

5) $\int_2^3\frac{1}{x^2}dx=-x^{-1}\Big|_2^3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$; 6) $\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_1^2=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$;

7) $\int_1^4\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$; 8) $\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2x^{1/2}\Big|_4^9=2(3-2)=2$.

1005. 1) $\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$; 2) $\int_0^{\ln 2}e^xdx=e^x\Big|_0^{\ln e}=e^{\ln 2}-e^0=1$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi}\cos x dx = \sin x\Big|_{-\pi}^{2\pi} = 0-0=0$; 4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi}\sin x dx = -\cos x\Big|_{-2\pi}^{\pi} = 1+1=2$;

5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi}\sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_{-2\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos(-4\pi)) = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$;

6) $\int\limits_{-3\pi}^{0}\cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Bigg|_{-3\pi}^{0} = \frac{1}{3}\sin 0 - \frac{1}{3}\sin(-9\pi) = 0 - \frac{1}{3}\sin\pi = 0-0=0$.

1006. 1) $\int\limits_{-3}^{2}(2x-3)dx = (x^2-3x)\Big|_{-3}^{2} = 4-6-9-9=-20$;

2) $\int\limits_{2}^{-1}(5-4x)dx = 5x-2x^2\Big|_{-2}^{-1} = -5-2-(-10-8)=11$;

3) $\int\limits_{-1}^{2}(1-3x^2)dx = (x-x^3)\Big|_{-1}^{2} = 2-8+1+(-1)^3=-6$;

4) $\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+1-\left(-\frac{1}{3}-1\right) = 2\frac{2}{3}$;

5) $\int\limits_{0}^{2}(3x^2-4x+5)dx = x^3-2x^2+5x\Big|_{0}^{2} = 8-8+10-0=10$.

1007. 1) Указание: $\int\limits_{0}^{4}(x-3\sqrt{x})dx = \left(\frac{x^2}{2}-2x^{3/2}\right)\Bigg|_{0}^{4}$.

2) Указание: $\int\limits_{1}^{9}\left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = (x^2-6\sqrt{x})\Big|_{1}^{9}$.

3) Указание: $\int\limits_{0}^{2}e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Bigg|_{0}^{2}$.

4) Указание: $\int\limits_{1}^{3}2e^{2x}dx = e^{2x}\Big|_{1}^{3}$.

1008. 1) $\int\limits_{-2}^{1}x(x+3)(2x-1)dx = \int\limits_{-2}^{1}(2x^3+5x^2-3x)dx = \left(\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$

$= 8+\frac{40}{3}+6+\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=12$.

2) $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)(x^2-2)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2-2x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-1+2\right)=-\frac{11}{12}$;

3) $\int\limits_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\limits_{1}^{2}\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{2}=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1=\frac{31}{6}$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx=\int\limits_{-2}^{-1}\left(4x^{-2}-8x^{-3}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1}=4+4-(2+1)=5$.

1009. 1) Указание: $\int\limits_{1}^{2}\frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\limits_{1}^{2}\left(5x^{2/3}-2x^{-1/3}\right)dx=\left(3x^{5/3}-3x^{2/3}\right)\Bigg|_{1}^{2}$.

2) Указание: $\int\limits_{1}^{3}\frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_{1}^{3}\left(3x^{1/2}-x^{-1/2}\right)dx=\left(2x^{3/2}-2x^{1/2}\right)\Bigg|_{1}^{3}$.

3) Указание: $\int\limits_{2}^{7}\frac{4}{\sqrt{x+2}}dx=\int\limits_{2}^{7}4(x+2)^{-1/2}dx=8(x+2)^{1/2}\Big|_{2}^{7}$.

1010. 1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{3}{2x-1}dx=\frac{3}{2}\ln|2x-1|\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{2}\ln 3-\frac{3}{2}\ln 1=\frac{3}{2}\ln 3$;

2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{4}{3x+2}dx=\frac{4}{3}\ln|3x+2|\Big|_{0}^{1}=\frac{4}{3}\ln 5-\frac{4}{3}\ln 2=\frac{4}{3}\ln 2{,}5$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

1011. 1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos x dx=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2x dx=-\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

4) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$. Решение: преобразуем подинтегральное выражение: $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=$

$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x. \text{ Т.е. } \int_0^\pi(\sin^4 x+\cos^4 x)dx=\int_0^\pi\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^\pi=\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{16}\sin 4\pi-\frac{1}{16}\sin 0=\frac{3\pi}{4}.$$

5) $$\int_0^3 x^2\sqrt{x+1}dx=\int_0^3\left((x+1)^2\sqrt{x+1}-2(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left((x+1)^{5/2}-2(x+1)^{3/2}+(x+1)^{1/2}\right)dx=\left(\frac{2}{7}(x+1)^{7/2}-\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right)\Big|_0^3=$$

$$=\frac{2}{7}\cdot 2^7-\frac{4}{5}\cdot 2^5+\frac{2}{3}\cdot 2^3-\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)=16\frac{16}{105}.$$

6) $$\int_3^4\frac{x^2-4x+5}{x-2}dx=\int_3^4\frac{(x-2)^2+1}{x-2}dx=\int_3^4\left(x-2+\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=8-8+\ln 2-\frac{9}{2}+6-\ln 1=\ln 2+1{,}5.$$

1012. Найти все числа $b>1$, для которых выполнятся равенство $\int_1^b(b-4x)dx\ge 6-5b$. Решение: $\int_1^b(b-4x)dx=(bx-2x^2)\Big|_1^b=-b^2-b+2$. Таким образом нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases}b>1\\-b^2-b+2\ge 6-5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>1\\b^2-4b+4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>1\\(b-2)^2\le 0\end{cases}, \text{ откуда } b=2.$$

Ответ: $b=2$.

§58. Вычисление площадей с помощью интегралов

1013. а) Указание: $S=\int_{-1}^1(x^2+4)dx$.

б) Указание: $S=\int_0^1(\sqrt{x}+1)dx$.

в) Указание: $S=\int_1^4\frac{2}{x}dx$.

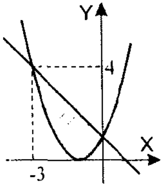

Рис. 159

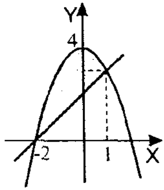

Рис. 160

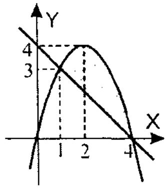

Рис. 161

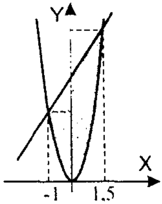

Рис. 162

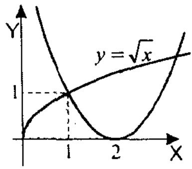

Рис. 163

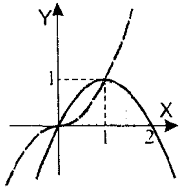

Рис. 164

1014. 1) Решение: из рис. 159 следует, что искомая площадь равна

$$\int_{-3}^{0}(1-x)dx-\int_{-3}^{0}(1+x)^2dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}-\frac{(1+x)^3}{3}\Bigg|_{-3}^{0}=3+\frac{9}{2}-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=4{,}5.$$ Ответ: 4,5.

2) Указание: $S=\int_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx-\int_{-2}^{1}(x+2)dx$, см. рис. 160.

3) Указание: $S=\int_{1}^{4}\left(4x-x^2\right)dx-\int_{1}^{4}(4-x)dx$, см. рис. 161.

4) Указание: $S=\int_{-1}^{1,5}3x^2dx-\int_{-1}^{1,5}(1{,}5x+4{,}5)dx$, см. рис. 162.

1015. 1) Решение: из рис. 163 следует, что искомая площадь равна

$$S=\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx+\int_{1}^{2}(x-2)^2dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Bigg|_{0}^{1}+\frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_{1}^{2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$ Ответ: 1.

2) Указание: $S=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{2}\left(2x-x^2\right)dx$, см. рис. 164.

1016. 1) Решение: найдем точки пересечения графика пораболы и оси OX: $x^2+3x=0$, откуда $x=0$ и $x=-3$. Тогда искомая площадь равна:

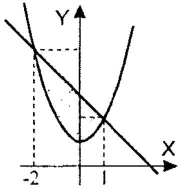

Рис. 165

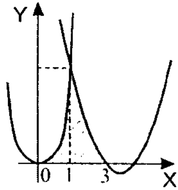

Рис. 166

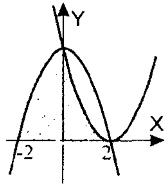

Рис. 167

$$S=\left|\int_{-3}^{0}\left(x^2+3x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0}\right|=\left|9-\frac{27}{2}\right|=4{,}5.$$ Ответ: 4,5.

2) Аналогично 1).

1017. 1) Решение: См. рис. 165, тогда искомая площадь равна:

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}\left(x^2+1\right)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=3-\frac{1}{2}+8-\frac{1}{3}-3-\frac{8}{3}=4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

2), 3) аналогично 1).

1018. 1) Указание: см. рис. 166. Координаты точки пересечения графиков (1; 6), таким образом, искомая площадь $S=\int_0^1 6x^2dx+\int_1^3 (x-3)(x-4)dx$.

2) Указание: см. рис. 167. $S=\int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx+\int_0^2 (x-2)^2\,dx$.

1019. 1) Указание: ур-ние прямой $y=\frac{2}{\pi}x$. Аналогично задачам 1014–1018.

2) Указание: см. рис. 168. $S=\int_0^{\pi/4}\sin x dx-\int_0^{\pi/4}\cos x dx$.

1020. 1) Указание: из уравнения $6x-x^2=x+4$ находим точки пересечения: $x_0=1$ и $x_0=4$. См. рис. 169. $S=\int_{-2}^{1}\left(6x-x^2\right)dx-\int_1^4(4+x)dx+\int_4^6\left(6x-x^2\right)dx$.

2) Указание: см. рис. 170. $S=\int_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx-\int_1^2(x+2)dx$.

1021. 1) Аналогично задачам 1019–1020.

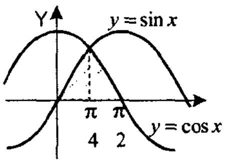

Рис. 168

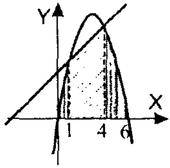

Рис. 169

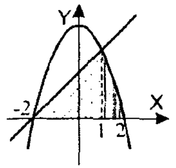

Рис. 170

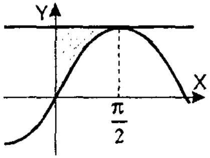

Рис. 171

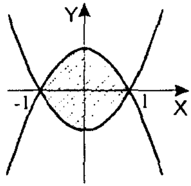

Рис. 172

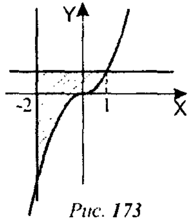

Рис. 173

2) Прямой $y=1$, осью OY и графиком функции $y=\sin x$ при $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Решение: из рис. 171 следует, что искомая площадь равна

$$S=\int_0^{\pi/2}1dx-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.

1022. 1) Указание: ур-ние прямой $y=3x-3$. Аналогично задачам 1014–1021.

2) Аналогично задаче 1021 п.2).

3) Указание: см. рис. 172. $S=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx$.

4) Указание: см. рис. 173. $S=\int_{-2}^{1}1dx-\int_{-2}^{1}x^3dx$.

1023. 1) Решение: пусть точка касания имеет координаты $\left(x_0;\,x_0^{\,2}+10\right)$, тогда уравнение касательной в этой точке $y=2x_0\left(x-x_0\right)+x_0^{\,2}+10$, т.е. $y=2x_0\cdot x+\left(10-x_0^{\,2}\right)$. Т.к. точка с координатами (0; 1) принадлежит касательной, то $1=10-x_0^{\,2}$, откуда $x_0=\pm3$. Т.е. касательные: $y=-6x+1$ и $y=6x+1$. Из рис. 174 следует, что искомая площадь равна

$$S=\int_{-3}^{3}\left(x^2+10\right)dx-\int_{-3}^{0}\left(-6x+1\right)dx-\int_{0}^{3}\left(6x+1\right)dx=$$

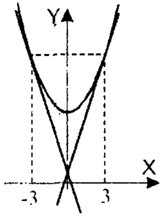

Рис. 174

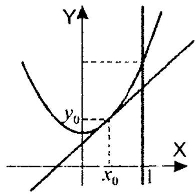

Рис. 175

$$=\left(\frac{x^3}{3}+10x\right)\Bigg|_{-3}^{3}+\left(3x^2-x\right)\Big|_{-3}^{0}-\left(3x^2+x\right)\Big|_{0}^{3}=9+30+9+30-27-3-27-3=18.$$

Ответ: 18.

2) Аналогично 1).

1024. Фигура ограничена линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. Найти точку $(x_0;\,y_0)$ графика функции $y=x^2+1$, через которую нужно провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.

Решение: общий вид уравнения касательной к графику $f(x)=x^2+1$ в точке $(x_0;y_0)$: $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2+1$, $y=2x_0\cdot x+\left(1-x_0^2\right)$, он пересекает ось OX в точке $A\left(\frac{x_0^2-1}{2x_0};\,0\right)$. Т.е. необходимо $0\le x_0\le 1$ (иначе искомая фигура не трапеция, см. рис. 175). Площадь трапеции $S(x_0)=\int_0^1\left(2x_0\cdot x+\left(1-x_0^2\right)\right)dx=\left(x_0\cdot x^2+\left(1-x_0^2\right)x\right)\Big|_0^1=-x_0^2+x_0+1$. Максимум этой функции достигается в точке $x_0=\frac{1}{2}$ (вершина пораболы $y=-x^2+x+1$). Ответ: $\left(\frac{1}{2};\,1\frac{1}{4}\right)$.

§59. Применение производной и интеграла к решению практических задач

1025. Указание: путь S, пройденный телом за промежуток времени $[t_1;\,t_2]$ равен $S=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$.

1026. Указание: начало движения соответствует моменту времени $t_1 = 0$. А остановка соответствует моменту времени t_2, т.е. $v(t_2) = 0$, откуда $t_2 = 4$.

Тогда $S = \int\limits_0^4 (4t - t^2)dt$.

1027. 1) $y' = 3 - 4x$. Решение: функция $y(x)$ есть первообразная функции $3 - 4x$, т.е. $y(x) = 3x - 2x^2 + C, C \in \mathbf{R}$. Ответ: $y(x) = 3x - 2x^2 + C, C \in \mathbf{R}$.

2)–6) аналогично 1).

1028. 1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$. Решение: $y(x)$ есть первообразная функции $\sin x$, т.е. $y(x) = -\cos x + C$. Т.к. $y(0) = 0$, то $C = 1$. Ответ: $y = -\cos x + 1$.

2)–4) аналогично 1).

5) Указание: $y(x) = e^x + C$, тогда $e^1 + C = 1$, откуда $C = 1 - e$.

6) Указание: $y(x) = -e^{-x} + C$, тогда $-e^0 + C = 2$, откуда $C = 3$.

1029. Указание: $y'' = -C_1\omega^2 \cos\omega x - C_2\omega^2 \sin\omega x$, подставьте это значение в выражение $y'' + \omega^2 y$.

1030. Указание: мы ищем период полураспада радия T. Тогда по формуле из §59 $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, т.е. $0{,}999 = 1 \cdot 2^{-10/T}$, откуда $\log_2 0{,}999 = -\frac{10}{T}$,

$T = -\frac{10}{\log_2 0{,}999} \approx 6928$ лет. Ответ: примерно 6928 лет.

1031, 1032. Аналогично задаче 4 §59.

Упражнения к главе X

1033. 1) $f(x) = \cos x, \mathrm{M}(0; -2)$. Решение: первообразная $F(x) = \sin x + C$. Тогда $F(0) = \sin 0 + C = 0 + C = -2$, отсюда $C = -2$. Ответ: $F(x) = \sin x - 2$.

2) $f(x) = \sin x, \mathrm{M}(-\pi; 0)$. Решение: первообразная $F(x) = -\cos x + C$. Тогда $F(-\pi) = -\cos(-\pi) + C = 1 + C = 0$, отсюда $C = -1$. Ответ: $F(x) = -\cos x - 1$.

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \mathrm{M}(4; 5)$. Решение: первообразная $F(x) = 2\sqrt{x} + C$. Тогда $F(4) = 2\sqrt{4} + C = 4 + C = 5$, отсюда $C = 1$. Ответ: $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

4) $f(x) = e^x, \mathrm{M}(0; 2)$. Решение: первообразная $F(x) = e^x + C$. Тогда $F(0) = e^0 + C = 1 + C = 2$, отсюда $C = 1$. Ответ: $F(x) = e^x + 1$.

5) $f(x)=3x^2+1, M(1;-2)$. Решение: первообразная $F(x)=x^3+x+C$. Тогда $F(1)=2+C=-2$, отсюда $C=-4$. Ответ: $F(x)=x^3+x-4$.

6) $f(x)=2-2x, M(2;3)$. Решение: первообразная $F(x)=2x-x^2+C$. Тогда $F(2)=4-4+C=3$, отсюда $C=3$. Ответ: $F(x)=2x-x^2+3$.

1034. 1) $\int\limits_{-1}^{2}2dx=2x\Big|_{-1}^{2}=4+2=6$;

2) $\int\limits_{-2}^{2}(3-x)dx=\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{2}=6-2+6+2=12$;

3) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-2x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{1}^{3}=(9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$;

4) $\int\limits_{-1}^{1}\left(2x-3x^2\right)dx=\left(x^2-x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=0-(1+1)=-2$;

5) $\int\limits_{1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx=\int\limits_{1}^{8}x^{1/3}dx=\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{1}^{8}=\frac{3}{4}\left(2^4-1^4\right)=\frac{15\cdot 3}{4}=\frac{45}{4}$;

6) Указание: $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^3}=\int\limits_{1}^{2}x^{-3}dx$.

7) Указание: $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$.

1035. 1) Указание: $S=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}\,dx=\int\limits_{1}^{4}x^{1/2}dx$.

2) Указание: $S=\int\limits_{0}^{\pi/3}\cos x\,dx$.

3) Указание: $S=\int\limits_{-2}^{1}(2-x)dx-\int\limits_{-2}^{1}x^2dx$. См. рис. 176.

4) Указание: $S=\int\limits_{-3/4}^{1}(0{,}5x+1{,}5)dx-\int\limits_{-3/4}^{1}2x^2dx$. См. рис. 177.

Проверь себя!

1. Указание: проверьте, что $F'(x)=f(x)$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

2. Указание: $F(x)=x^3+x^2-3x+C$; $F(1)=-2$.

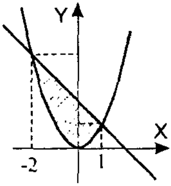

Рис. 176

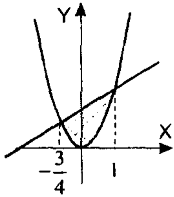

Рис. 177

3. 1) $\int\limits_1^2 3x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_1^2 = 12 - \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$; 2) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_2^4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$; 4) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -1$.

4. 1) Указание: $S = \int\limits_{-3}^{2}(x^2 + x - 6)dx$;

2) Указание: $S = \int\limits_{-3}^{3}10dx - \int\limits_{-3}^{3}(x^2 + 1)dx$.

1036. 1) $\int\limits_0^1 (5x^4 - 8x^3)dx = (x^5 - 2x^4)\Big|_0^1 = 1 - 2 = -1$;

2) $\int\limits_{-1}^{2}(6x^3 - 5x)dx = \left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2} = 24 - 10 - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = 15$;

3) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx = \int\limits_1^4\left(3x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(2x^{\frac{3}{2}} - 14x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4 = 16 - 28 - (2 - 14) = 0$;

4) $\int\limits_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx = \int\limits_1^8\left(4x^{\frac{1}{3}} - 16x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \left(3x^{\frac{4}{3}} - 3\cdot 16x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_1^8 = 48 - 3\cdot 32 + 45 = -3$;

5) $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1}dx = \int\limits_0^3 (x+1)^{1/2}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}$;

6) $\int\limits_2^6 \sqrt{2x-3}dx = \int\limits_2^6 (2x-3)^{1/2}dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{3/2}\Big|_2^6 = \frac{1}{3}(27 - 1) = \frac{26}{3}$;

1037. 1) Указание: $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4}$.

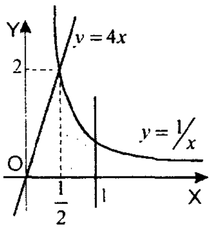

Рис. 178

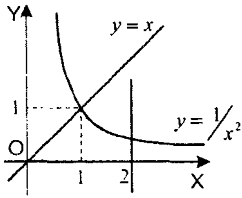

Рис. 179

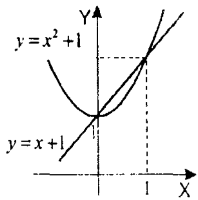

Рис. 180

2) Указание: $\int\limits_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx=-\frac{1}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/3}$.

3) Указание: $\int\limits_1^3 3\sin(3x-6)dx=-\cos(3x-6)\Big|_1^3$.

4) Указание: $\int\limits_0^3 8\cos(4x-12)dx=2\sin(4x-12)\Big|_0^3$.

1038. Решение: найдем координаты точек пересечения графиков функций $\frac{1}{x}$ и $4x$. $\frac{1}{x}=4x$, $4x^2=1$, откуда $x=\pm\frac{1}{2}$. Тогда (см. рис. 178)

$$S=\int\limits_0^{1/2}4x\,dx+\int\limits_{1/2}^1\frac{1}{x}dx=2x^2\Big|_0^{1/2}+\ln x\Big|_{1/2}^1=\frac{1}{2}+\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\ln 2.$$ Ответ: $\frac{1}{2}+\ln 2$.

2) Аналогично 1), см. рис. 179.

3) Указание: найдем точки пересечения: $x^2=2\sqrt{2x}$, $x^4=8x$, $x(x^3-8)=0$, т.е. $x=0$ и $x=2$. См. рис. 180. Аналогично 1).

4) Аналогично 3).

1039. 1) Решение: найдем координаты точек пересечения графиков $x^2-6x+9=x^2+4x+4$; $10x=5$, $x=\frac{1}{2}$. Тогда (см. рис. 181)

$$S=\int\limits_{-2}^{1/2}(x+2)^2dx+\int\limits_{1/2}^3(x-3)^2dx=\frac{(x+2)^3}{3}\Big|_{-2}^{1/2}+\frac{(x-3)^3}{3}\Big|_{1/2}^3=\frac{125}{12}=10\frac{5}{12}.$$

Ответ: $10\frac{5}{12}$.

2) Аналогично 1). См. рис. 182.

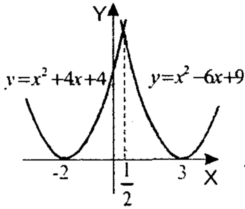

Рис. 181

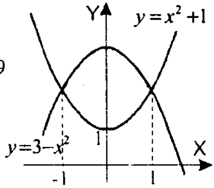

Рис. 182

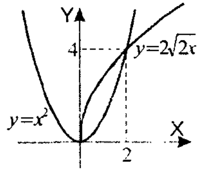

Рис. 183

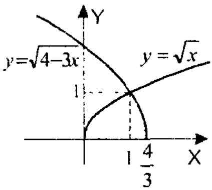

Рис. 184

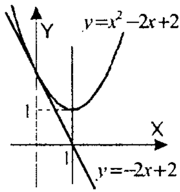

Рис. 185

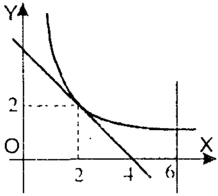

Рис. 186

3) Аналогично 1). См. рис. 183.

4) Решение: найдем координаты точек пересечения графиков: $\sqrt{x} = \sqrt{4-3x}$, $x = 4-3x$, откуда $x = 1$. Тогда (см. рис. 184)

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^{4/3} \sqrt{4-3x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{2}{9}(4-3x)^{3/2}\Big|_1^{4/3} = \frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}.$$ Ответ: $\frac{8}{9}$.

1040. 1) Указание: уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 2$ в точке (0; 2) имеет вид $y = -2x + 2$. Из рис. 185 видно, что

$$S = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2)dx - \int_0^1 (-2x + 2)dx.$$

2) Указание: уравнение касательной к графику функции $y = 4/x$ в точке (2; 2) имеет вид $y = 4 - x$, см. рис. 186. $S = \int_2^6 \frac{4}{x}dx - \int_2^4 (4-x)dx$.

1041. 1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, x = 0, y = 6, x < 0$. Решение: Исследуем функцию $y(x)$ на экстремум: $y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$. Т.е. в точке

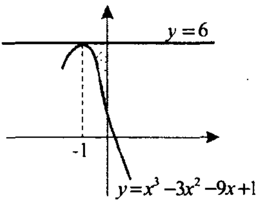

Рис. 187

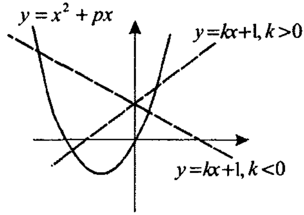

Рис. 188

$x_0=-1$ функция имеет максимум, $y(-1)=6$. Следовательно (см. рис. 187) $$S=\int_{-1}^{0}6dx-\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x^2-9x+1\right)dx=6-\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=6+\frac{1}{4}+1-\frac{9}{2}-1=1{,}75.$$ Ответ: 1,75.

2) Аналогично 1).

1042. Указание: аналогично задаче 1024, см. рис. 188.

Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа

1. Числа и алгебраические преобразования

1043. Найти 2,5% от 3,2. Решение: искомое число равно $2,5 \cdot 0,01 \cdot 3,2 = 0,08$. Ответ: 0,08.

1044. Найти число, если 42% его составляют 12,6. Решение: пусть x – искомое число, тогда $0,42x = 12,6$. Откуда $x = 12,6 : 0,42 = 30$. Ответ: 30.

1045. Какой процент составляет 1,3 от 39? Решение: пусть x -- процент, тогда

$39 \cdot \frac{x}{100} = 1,3$. Откуда $x = 1,3 \cdot 100 : 39 = 3\frac{1}{3}\%$. Ответ: $3\frac{1}{3}\%$.

1046. Сколько процентов составляет 46,6 от 11,65? Решение: пусть y – процент, тогда $46,6 = \frac{y}{100} \cdot 11,65$. Откуда $y = 100 \cdot 46,6 : 11,65 = 400\%$.

Ответ: 400%.

1048. Найти 180% от 7,5. Решение: искомое число равно $180 : 100 \cdot 7,5 = 13,5$. Ответ: 13,5.

1049. Решение: пусть изначально товар стоил x, тогда после первого снижения цены его цена стала $x - 0,24x = 0,76x$. После второго снижения цены цена составила $0,76x - 0,5 \cdot 0,76x = 0,38x$. Т.е. новая цена составила 38% от прежней, значит цена снизилась на 100% – 38% = 62%. Ответ: 62%.

1050. Решение: масса сплава равна 18 + 6 + 36 = 60 кг. Тогда 18 кг цинка составляют $18 : 60 \cdot 100 = 30\%$ сплава; 6 кг олова сотавляют $6 : 60 \cdot 100 = 10\%$ сплава; а 36 кг меди $36 : 60 \cdot 100 = 60\%$.

Ответ: 30%, 10% и 60%.

1051. Решение: пусть x – стоимость товара, тогда расходы по перевозке составляют $0,08x$. Откуда $3942 = x + 0,08x$, т.е. $x = \frac{3942}{1+0,08} = 3650$.

Ответ: 3650 р.

1052. Решение: объем пирамиды равен $\frac{1}{3}hS$, где h – высота, а S – площадь основания. Откуда объем новой пирамиды равен:

$\frac{1}{3}\cdot 1{,}1h\cdot 1{,}1S = \frac{1}{3}hS\cdot 1{,}21$.

Т.е. независимо от начальных параметров, объем пирамиды увеличится на 21%. Ответ: 21%.

1053. Решение: пусть x – данное число, тогда существует целое число k, такое что $x = 72k + 68$. Откуда $x = 12\cdot 6k + 12\cdot 5 + 8 = 12(6k+5)+8$. Т.к. $6k+5\in \mathbf{Z}$, то остаток от деления x на 12 равен 8. Ответ: 8.

1054. Решение: пусть x и y – искомые числа, тогда:

$$\begin{cases} x+y=1100 \\ 0{,}06x=0{,}05y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1100-y \\ 6x=5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1100-y \\ 11y=6600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=500 \\ y=600 \end{cases}$$

Ответ: $x = 500$, $y = 600$.

1055. Решение: сумма вклада через n лет вычисляется по формуле: $600\cdot(1+0{,}03)^n$, т.е. через 2 года сумма составит $600\cdot(1+0{,}03)^2 = 636{,}54$ р., а через 3 года $600\cdot(1+0{,}03)^3 = 656{,}6262$. Ответ: 636 р. 54 к.; 656 р. 63 к.

1056. Решение: сумма вклада через месяц составила $500\cdot 1{,}02^{1/12}$ р., т.е. после снятия 100 р. на счету осталось $500\cdot 1{,}02^{1/12} - 100$ р. Соответственно, через год сумма вклада увеличится до $\left(500\cdot 1{,}02^{1/12} - 100\right)\cdot 1{,}02 \approx 408{,}84$.

Ответ: 408 р. 84 коп.

1057. 1) $23{,}276 : 2{,}3 - 3{,}6\cdot(17{,}2\cdot 0{,}125 + 0{,}005 : 0{,}1) + 6{,}25\cdot 3{,}2 =$
$= 10{,}12 - 3{,}6(2{,}15+0{,}05) + 20 = 22{,}2$.

2) $9{,}25\cdot 1{,}04 - (6{,}372 : 0{,}6 + 1{,}125\cdot 0{,}8) : 1{,}2 + 0{,}16\cdot 6{,}25 =$
$= 9{,}62 - (10{,}62+0{,}9) : 1{,}2 + 1 = 9{,}62 - 9{,}6 + 1 = 1{,}02$.

1058. 1) $$\frac{\left(28:1\frac{3}{4}+7\frac{1}{3}:22+1\frac{2}{3}\cdot 9\frac{3}{4}+14:1\frac{1}{2}\right)\cdot 3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2}-9\frac{3}{4}} = \frac{\left(\frac{28\cdot 4}{7}+\frac{22\cdot 1}{3\cdot 22}+\frac{5\cdot 39}{3\cdot 4}+\frac{14\cdot 2}{3}\right)\cdot\frac{22}{7}}{\frac{21}{2}-\frac{39}{4}} =$$

$$=\left(16+\frac{1}{3}+\frac{65}{4}+\frac{28}{3}\right)\frac{22\cdot 4}{7\cdot 3} = \frac{503\cdot 22\cdot 4}{12\cdot 7\cdot 3} = 175\frac{41}{63}.$$

2) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108) = 0{,}125:0{,}125+0{,}25:0{,}25 = 2$.

1059. 1) $x = 10 : \frac{1}{8}\cdot 1\frac{1}{4} = 100$; 2) $x = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4}\cdot 0{,}75 = 0{,}5$;

3) $x = 15 \cdot 1{,}456 : 1{,}05 = 20{,}8$.

1060. $\left(\dfrac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5} = \left(\dfrac{15\sqrt{5}}{1/5} - 2 \cdot 7\right)(3+3\sqrt{5}) - 183\sqrt{5} =$

$= (75\sqrt{5} - 14)(3 + 3\sqrt{5}) - 183\sqrt{5} = 225\sqrt{5} - 42 + 1125 - 42\sqrt{5} - 183\sqrt{5} = 1083$.

1061. 1) $\log_{27} 729 = \log_{3^3} 3^6 = \dfrac{6}{3}\log_3 3 = 2$;

2) $\log_9 729 = \dfrac{6}{2}\log_3 3 = 3$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 729 = -6\log_3 3 = -6$.

1062. 1) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64} = \log_{2^{-4}} 2^{\frac{6}{5}} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{5} = -0{,}3$;

2) $\log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0$.

1063. 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}} = 2^{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}} = 2^2 = 4$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3} = 2^{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}-3} = 2^6 = 64$.

1064. 1) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36} = \log_3 3^{2-1/5} + \log_6 6^{2/5} = 2 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = 2{,}2$;

2) $16^{0{,}5\log_4 10+1} = 16^{0{,}5\log_4 10} \cdot 16 = \left(4^2\right)^{0{,}5\log_4 10} \cdot 16 = 4^{\log_4 10} \cdot 16 = 16 \cdot 10 = 160$.

1065. 1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ и $2{,}5^{0{,}5}$. Решение: т.к. $2{,}5 > 1$, то функция $y = 2{,}5^x$ возрастает. Следовательно, если $\dfrac{1}{7} < 0{,}5$, то $2{,}5^{\frac{1}{7}} < 2{,}5^{0{,}5}$. Ответ: $2{,}5^{\frac{1}{7}} < 2{,}5^{0{,}5}$.

2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ и $0{,}2^{\frac{3}{4}}$. Решение: т.к. $0{,}2 < 1$, то функция $y = 0{,}2^x$ убывает. Следовательно, если $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$, то $0{,}2^{\frac{2}{3}} > 0{,}2^{\frac{3}{4}}$. Ответ: $0{,}2^{\frac{2}{3}} > 0{,}2^{\frac{3}{4}}$.

3) $\log_{3,1}\sqrt{10}$ и $\log_{3,1} 3$. Решение: т.к. $3{,}1 > 1$, то $y = \log_{3,1} x$ возрастает. Следовательно, если $\sqrt{10} > 3$, то $\log_{3,1}\sqrt{10} > \log_{3,1} 3$.

Ответ: $\log_{3,1}\sqrt{10} > \log_{3,1} 3$.

4) $\log_{0,3}\dfrac{4}{5}$ и $\log_{0,3}\dfrac{3}{4}$. Решение: т.к. $0 < 0{,}3 < 1$, то $y = \log_{0,3} x$ убывает. Следовательно, если $\dfrac{4}{5} > \dfrac{3}{4}$, то $\log_{0,3}\dfrac{4}{5} < \log_{0,3}\dfrac{3}{4}$. Ответ: $\log_{0,3}\dfrac{4}{5} < \log_{0,3}\dfrac{3}{4}$.

1066. 1) $a^{0,2}>1$. Т.к. $0,2>0$ и $a^{0,2}>a^0$, то функция $y=a^x$ возрастает, следовательно $a>1$. Ответ: $a>1$.

2) $a^{-1,3}>1$. Т.к. $-1,3<0$, а $a^{-1,3}>a^0$, то функция $y=a^x$ убывает, следовательно $0<a<1$. Ответ: $0<a<1$.

3) $a^{-3,1}<1$. Т.к. $-3,1<0$, а $a^{-3,1}<a^0$, то функция $y=a^x$ возрастает, следовательно $a>1$. Ответ: $a>1$.

4) $a^{2,7}<1$. Т.к. $2,7>0$, а $a^{2,7}<a^0$, то функция $y=a^x$ убывает, следовательно $0<a<1$. Ответ: $0<a<1$.

5) $\log_a 0,2>0$. Т.к. $0,2<1$, а $\log_a 0,2>\log_a 1$, то функция $y=\log_a x$ убывает, следовательно $0<a<1$. Ответ: $0<a<1$.

6) $\log_a 1,3>0$. Т.к. $1,3>1$, а $\log_a 1,3>\log_a 1$, то функция $y=\log_a x$ возрастает, следовательно $a>1$. Ответ: $a>1$.

1067. 1) $\sqrt{18}$ и $4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$. Решение: $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$; $4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}=3^2\cdot\frac{5}{11}=3\cdot\frac{15}{11}$.

Т.к. $\sqrt{2}>\frac{15}{11}$ (т.к. $2>\left(\frac{15}{11}\right)^2$), то $\sqrt{18}>4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$.

Ответ: $\sqrt{18}>4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$.

2) $\sqrt[3]{18}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$. Решение: $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}=(2)^{-1}\cdot 5=\frac{5}{2}$. Возведем оба числа в куб, получим $18>\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}$. Ответ: $\sqrt[3]{18}>\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$

1068. 1) $\lg 50$. Решение: $\lg 50=\lg(5\cdot 10)=\lg 5+1$. Т.к. $1<5<10$, то $0<\lg 5<1$, поэтому $1<\lg 50<2$. Ответ: $1<\lg 50<2$.

2) $\log_2 10$. Решение: $\log_2 10=1+\log_2 5$. Т.к. $2<\log_2 5<3$, поэтому $3<\log_2 10<4$. Ответ: $3<\log_2 10<4$.

1069. 1) $3\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}-4\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{9}}-\frac{1}{2}\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}+3\sqrt{36}\cdot\sqrt{5}-\frac{4\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=$

$=\sqrt{5}-\sqrt{5}+18\sqrt{5}-10\sqrt{5}=8\sqrt{5}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}-\frac{3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{4\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=$

$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{2}=0$.

1070. 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{(3a-1)^2}=|a^2|\cdot|3a-1|=a^2|3a-1|$;

2) $\sqrt{b^2(4b^4+4b^2+1)}=\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{(2b^2+1)^2}=|b|\cdot(2b^2+1)$.

1071. 1) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

2) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\dfrac{3(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=3(\sqrt{6}-\sqrt{5})$;

3) $\dfrac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\dfrac{12(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2}=4(\sqrt{10}+\sqrt{7})$;

4) $\dfrac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\dfrac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{(\sqrt{11})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{11}-\sqrt{3}$.

1072. 1) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{7-5}{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

1073. 1) $0,(4)$. Решение: $10\cdot0,(4)=4,(4)$, тогда $(10-1)\cdot0,(4)=4,(4)-0,(4)=4$, т.е. $9\cdot0,(4)=4$, откуда $0,(4)=\dfrac{4}{9}$. Ответ: $0,(4)=\dfrac{4}{9}$.

2) $2,(7)$. Решение: $10\cdot2,(7)=27,(7)$, тогда $9\cdot2,(7)=27,(7)-2,(7)=25$, т.е. $2,(7)=\dfrac{25}{9}$. Ответ: $2,(7)=\dfrac{25}{9}$.

3) $0,(21)$. Решение: $100\cdot0,(21)=21,(21)$, $99\cdot0,(21)=21,(21)-0,(21)=21$, т.е. $0,(21)=\dfrac{21}{99}$. Ответ: $0,(21)=\dfrac{7}{33}$.

4) $1,(36)$. Решение: $100\cdot1,(36)=136,(36)$, $99\cdot1,(36)=136,(36)-1,(36)=135$, т.е. $1,(36)=\dfrac{135}{99}$. Ответ: $1,(36)=\dfrac{15}{11}$.

5) $0,3(5)$. Решение: $10\cdot0,3(5)=3,5(5)$, $9\cdot0,3(5)=3,5(5)-0,3(5)=3,2$, т.е. $0,3(5)=\dfrac{3,2}{9}=\dfrac{16}{45}$. Ответ: $0,3(5)=\dfrac{16}{45}$.

6) $0{,}21(3)$. Решение: $10\cdot 0{,}21(3)=2{,}13(3)$, $9\cdot 0{,}21(3)=2{,}13(3)-0{,}21(3)=1{,}92$,

т.е. $0{,}21(3)=\dfrac{1{,}92}{9}=\dfrac{16}{75}$. Ответ: $0{,}21(3)=\dfrac{16}{75}$.

1074. 1) $\dfrac{5}{6}=0{,}8(3)$; 2) $2\dfrac{1}{9}=\dfrac{19}{9}=2,(1)$;

3) $\dfrac{1}{7}=0,(142857)$; 4) $5\dfrac{2}{11}=\dfrac{57}{11}=5,(18)$.

1075. Ответ: да, например: $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$.

1076. Указание: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{|b|}$.

1077. Указание: представим $a=\dfrac{p}{q}$, где $p\in\mathbf{N}, q\in\mathbf{Z}$. Если $a+b$ рациональное число, то $a+b=\dfrac{p_1}{q_1}$, где $p_1\in\mathbf{N}, q_1\in\mathbf{Z}$, тогда $b=\dfrac{p_1}{q_1}-\dfrac{p}{q}$ – рациональное число. Аналогично для произведения и частного.

1078. 1) $[1; 3\sqrt{2}+2\sqrt{7}]$ и $[3\sqrt{3}+4; 15]$. Решение: $1<3\sqrt{3}+4$, поэтому необходимо сравнить $3\sqrt{2}+2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3}+4$. Возведем оба числа в квадрат, получим $46+12\sqrt{14}$ и $43+24\sqrt{3}$. Сравним числа $3+12\sqrt{14}$ и $24\sqrt{3}$, сократим на 3, получим $1+4\sqrt{14}$ и $8\sqrt{3}$. Снова возведем в квадрат, получим $225+8\sqrt{14}$ и 192. Т.к. второе число меньше, то $3\sqrt{2}+2\sqrt{7}>3\sqrt{3}+4$, значит промежутки имеют общие точки.

2)–4) аналогично 1).

1079. 1) Указание: проверьте, что $\left|a-\dfrac{a+b}{2}\right|=\left|b-\dfrac{a+b}{2}\right|$.

2) Указание: проверьте, что при $c>0$ справедливо неравенство $a<\dfrac{a+bc}{1+c}<b$.

1080. 1) Указание: высота правильного треугольника равна $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда радиус вписанной окружности равен $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

2) Указание: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{4{,}5:2}{a}$.

1081. Указание: $\operatorname{tg}54^\circ=\dfrac{120}{l}$.

1082. Решение: $AB = AD + DB$ (см. рис.189), т.к.

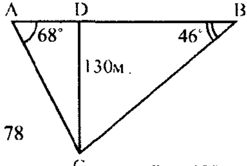

Рис. 189

$$\operatorname{tg}68^\circ = \frac{DC}{AD},\ \operatorname{tg}46^\circ = \frac{DC}{DB}, \text{ то}$$

$$AB = \frac{DC}{\operatorname{tg}68^\circ} + \frac{DC}{\operatorname{tg}46^\circ} = 130\left(\frac{1}{\operatorname{tg}68^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg}46^\circ}\right) \approx 178$$

Ответ: длина моста ≈ 178 м.

1083. 1) $\cos\alpha = 0{,}8$. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(0{,}8)^2} = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$. Ответ: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

2) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$.

3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2{,}4^2+1}} = \frac{5}{13}$; $\sin\alpha = 2{,}4\cdot\frac{5}{13} = \frac{12}{13}$.

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^2+1}} = \frac{7}{25}$; $\sin\alpha = \frac{24}{7}\cdot\frac{7}{25} = \frac{24}{25}$.

1084. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

1085. $\sin\frac{11\pi}{3} + \cos 690^\circ - \cos\frac{19\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

1086. 1) $2\operatorname{arctg}1 - 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 3\cdot\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$.

2) $8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 8\cdot\frac{\pi}{4} + 6\cdot\frac{\pi}{3} = 4\pi$.

1087. 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}3) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}3)} = \frac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}$.

1088. 1) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4} = \log_4\frac{\sqrt{2}}{2} = \log_{2^2} 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$;

2) $\log_{10} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \log_{10} 1 = 0$;

3) $\log_8 \sin\frac{3}{4}\pi = \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_{2^3} 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}$;

4) $\log_2 \cos\frac{1}{3}\pi = \log_2 \frac{1}{2} = -1$;

5) $\log_3 1 - \log_4 \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \log_5 \cos 0 = 0 + \log_4 1 \cdot \log_5 1 = 0$.

1089. 1) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1)} = 1$;

3) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \sin\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = -\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

5) $\cos(\operatorname{arctg} 1) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = \cos\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

1090. 1) $\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$;

2) $\sin(5\arccos 0) = \sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

1091. 1) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha / \cos\alpha}{\sin^2\alpha / \cos^2\alpha - 1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9-16} = -\frac{12}{7}$;

2) Т.к. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$, то $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1}{2} = -\frac{4}{9}$.

1092. 1) $\frac{a+2}{a-2}\cdot\left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6} : \frac{2a-3}{a-2}\right) = \frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{(a+1)(2a-3)}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{a-2}{2a-3} = \frac{a+1}{a+3}$;

2) $\left(2+\frac{1}{b}\right) : \frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\frac{2b+1}{b} = \frac{2b+1}{b}\cdot\frac{b(b-4)}{2(2b+1)^2}\cdot\frac{2b+1}{b} = \frac{b-4}{2b}$.

1093. 1) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a+1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}=$

$$=\frac{a}{(a-1)(a+1)}+\frac{a^2+a+1}{(a^2+1)(a-1)}+\frac{a^2-a-1}{(a^2+1)(a+1)}-\frac{2a^3}{(a^2+1)(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{a^3+a^2+2a+2}{(a^2+1)(a-1)(a+1)}=\frac{(a^2+2)(a+1)}{(a^2+1)(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+2}{(a^2+1)(a-1)};$$

2) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}=$

$$=\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{2a}{(a+3)(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{2}{a+3}=$$

$$=\frac{(a+1)+2a(a+2)+(a+3)-2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

1094. 1) $\frac{1}{4+4\sqrt{a}}-\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{4-4\sqrt{a}}=\frac{1-\sqrt{a}-2+1+\sqrt{a}}{4\cdot(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}=0;$

2) $\frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}=\frac{(\sqrt{2}+1)(a-1)}{(\sqrt{2}+2)(a-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}.$

1095. 1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)=1-\frac{a-x}{a+x}=\frac{2x}{a+x}=\frac{8}{9};$

2) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}{a^2-(a^2-x^2)}=$

$$=\frac{4a\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=\frac{4\cdot 3\sqrt{4}}{5}=4{,}8.$$

1096. 1) Указание: $x^{1/2}-x=x^{1/2}\left(1-x^{1/2}\right)$, приведите дроби к общему знаменателю, аналогично 2).

2) $\frac{m+2m^{1/2}+1}{2m^{1/2}}\cdot\left(\frac{2m^{1/2}}{m^{1/2}-1}-\frac{4m^{1/2}}{m-1}\right)=\frac{\left(m^{1/2}+1\right)^2}{2m^{1/2}}\cdot\frac{2m^{1/2}\left(m^{1/2}+1\right)-4m^{1/2}}{\left(m^{1/2}-1\right)\left(m^{1/2}+1\right)}=$

$$=\frac{\left(m^{1/2}+1\right)\left(2m-2m^{1/2}\right)}{2m^{1/2}\left(m^{1/2}-1\right)}=m^{1/2}+1.$$

1097. 1) $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}=6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}\cdot 18mn}=6n\cdot\sqrt{9m^2}=18n|m|$;

2) $\frac{a-1}{a^{3/4}+a^{1/2}}\cdot\frac{a^{1/2}+a^{1/4}}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}=\frac{\left(a^{1/2}-1\right)\left(a^{1/2}+1\right)\cdot a^{1/4}\left(a^{1/4}+1\right)\cdot a^{1/4}}{a^{1/2}\left(a^{1/4}+1\right)\left(a^{1/2}+1\right)}=\sqrt{a}-1$

1098. 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a\sqrt{a}-1+a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\cdot\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)(a-1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$;

2) $\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=\left(\frac{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1-\sqrt{b}+b\right)}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}=$

$=\frac{\left(1-\sqrt{b}\right)^2\left(1+\sqrt{b}\right)}{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1-\sqrt{b}\right)}=1-\sqrt{b}$.

1099. $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-5/3}b^{-2}-b^{-5/3}a^{-2}}-a^{1/3}b^{1/3}=\frac{a^{-2}b^{-2}(a-b)}{a^{-2}b^{-2}\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)}-a^{1/3}b^{1/3}=$

$=\frac{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)}{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)}-a^{1/3}b^{1/3}=a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}-a^{1/3}b^{1/3}=a^{2/3}+b^{2/3}$;

1100. 1) $\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=\left(\frac{2ab}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)^{-2}-$

$-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}=\frac{(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-2\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}\right)}{4ab}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-1/2}+b^{-1/2}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\cdot\frac{a+b}{ab}+\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}=$

$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\frac{1}{ab}$.

1101. Указание: $9a-25a^{-1}=\left(3a^{1/2}-5a^{-1/2}\right)\left(3a^{1/2}+5a^{-1/2}\right)$;

$$a+7+10a^{-1}=\left(a^{1/2}+2a^{-1/2}\right)\left(a^{1/2}+5a^{-1/2}\right).$$

1102. $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\dfrac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-\left(b^2+18b+81\right)^{0.5}=\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}(b-9)}+\dfrac{\sqrt{b}}{b-9}\right)^{-2}-\sqrt{(b+9)^2}=$

$=\left(\dfrac{3+\sqrt{b}}{b-9}\right)^{-2}-b-9=\left(\sqrt{b}-3\right)^2-b-9=-6\sqrt{b}$, т.к. по смыслу задачи $b>0$.

1103. 1) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

2) Решение: т.к. $(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{ctg}\alpha)=\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha\sin\alpha}=$

$=\dfrac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}+2$, то $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$.

1104. $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}=\dfrac{1-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$

$=\dfrac{-2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)}=\dfrac{-2\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$, ч.т.д.

1105. 1) $\sin^2(\alpha+8\pi)+\cos^2(\alpha+10\pi)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha$.

1106. $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\left(1-2\cos^2\alpha\right)}+\dfrac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{-2\cos 2\alpha}-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=$

$=-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,2\alpha-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,2\alpha-\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,2\alpha=-\mathrm{tg}\,2\alpha$.

1107. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}=1-\sin\alpha-1-\cos\alpha=$
$=-\sin\alpha-\cos\alpha$, ч.т.д.

1108. 1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha=1+\sqrt{2}\left(\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$.

2) Аналогично 1).

3) $3 - 4\sin^2\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha\right) = 4\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\right) =$

$= 4\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 4\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

4) Аналогично 3).

1109. 1) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. Решение: преобразуем левую часть: $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\pi - (\alpha + \beta)) =$

$= \sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} =$

$= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cdot(-2)\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} =$

$= 4\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$. Преобразуем правую часть: $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$

$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}$, ч.т.д.

2) Аналогично 1).

1110. 1) $\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 3\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{4 + 2}{1 + 6} = \frac{6}{7}$.

2) $\frac{2 - \sin^2\alpha}{3 + \cos^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{3\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + 1} = \frac{2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) - \mathrm{tg}^2\alpha}{3(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + 1} = \frac{2\cdot 5 - 4}{3\cdot 5 + 1} = \frac{3}{8}$.

1111. Решение: $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + 2$, следовательно $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$. Ответ: 7.

1112. 1) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$;

2) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=$

$=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$.

1113. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha+1-2\sin\alpha\cos\alpha=2$;

3), 4) Указание: воспользуйтесь формулами суммы для синуса и косинуса.

1114. 1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

1115. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha:\sin^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

2) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}:\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) Аналогично задаче 1113 п.1);

4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=$

$=\dfrac{1-\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=4$.

1116. 1) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\cos\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}-1}{\dfrac{1}{\cos\alpha}+1}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\dfrac{\sin3\alpha+2\sin3\alpha\cos2\alpha}{\cos3\alpha+2\cos3\alpha\cos2\alpha}=\dfrac{\sin3\alpha(1+2\cos2\alpha)}{\cos3\alpha(1+2\cos2\alpha)}=\operatorname{tg}3\alpha$;

4) $\dfrac{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}{2\sin2\alpha-\sin4\alpha}=\dfrac{2\sin2\alpha+2\sin2\alpha\cos2\alpha}{2\sin2\alpha-2\sin2\alpha\cos2\alpha}=\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

1117. 1) Указание: $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

2) Указание: $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

1118. 1) $\dfrac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=\dfrac{1-\cos(-2\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1-(1-2\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=2$, ч.т.д.

2) $\dfrac{\sin^2(\alpha+90^\circ)}{1+\sin(-\alpha)}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin\alpha}=1+\sin\alpha=1+\cos(\alpha-90^\circ)$, ч.т.д.

1119. $\dfrac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)}-\dfrac{\sin2x-8\sin^2x}{\cos2x}=\dfrac{5\cos x-3\sin x}{\cos x-\sin x}-$

$-\dfrac{2\sin x(\cos x-4\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\dfrac{(5\cos x-3\sin x)(\cos x+\sin x)-2\sin x(\cos x-4\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$

$=\dfrac{5\cos^2x+5\sin^2x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\dfrac{5}{\cos^2x-\sin^2x}$.

1120. Указание: воспользуйтесь формулами приведения и тождеством $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$.

1121. 1) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1=(\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta)^2+$

$+(\sin\alpha\cos2\beta-\cos\alpha\sin2\beta)^2-1=\cos^2\alpha\cos^22\beta+\sin^2\alpha\sin^22\beta+$

$+\sin^2\alpha\cos^22\beta+\cos^2\alpha\sin^22\beta-1=$

$=\cos^2\alpha(\cos^22\beta+\sin^22\beta)+\sin^2\alpha(\sin^22\beta+\cos^22\beta)-1=0$.

2) Аналогично 1).

1122. 1) Указание: воспользуйтесь формулой разности косинусов в числителе, аналогично 2).

2) Указание: $1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha=1+\cos2\alpha+2\cos\alpha\cos2\alpha$, воспользуйтесь формулой $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-1$.

1123. 1) $\dfrac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\dfrac{4\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{4(1-\sin^2\alpha)-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\left(\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}\right)\left(\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

1124. 1) Указание: $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) $\dfrac{1+\cos x+\sin x+\operatorname{tg}x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{\cos x+\cos x(\cos x+\sin x)+\sin x}{\cos x(\cos x+\sin x)}=$

$=\dfrac{(\cos x+1)(\cos x+\sin x)}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\dfrac{\cos x+1}{\cos x}$.

1125. Указание: разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x$.

1126. $\dfrac{2-3\sin^2\alpha}{\cos2\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2-3\sin^2\alpha-(\sin\alpha+2\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$

$=\dfrac{2-2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos2\alpha}=\dfrac{\sin2\alpha}{2\cos2\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha=-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

1127. Указание: распишите тангенс по определению, затем воспользуйтесь формулой синуса и косинуса суммы или разности.

1128. 1) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\cos2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+\sin\alpha$, ч.т.д.

2) $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1-\cos2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1-\sin\alpha$, ч.т.д.

1129. 1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$, ч.т.д.

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$, ч.т.д.

1130. 1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{\dfrac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}+\dfrac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}}=\dfrac{2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{\sin^2\alpha/2+\cos^2\alpha/2}=\sin\alpha$, ч.т.д.

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha$, ч.т.д.

1131. $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\left(1+2\cos^2\alpha/_2-1\right)\cdot\frac{\sin\alpha/_2}{\cos\alpha/_2}=2\cos\alpha/_2\sin\alpha/_2=\sin\alpha$, ч.т.д.

1132. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$, ч.т.д.

2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$, ч.т.д.

1133. Решение: преобразуем правую часть: $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=2\cos\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\right)=\cos\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$, ч.т.д.

1134. 1) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$, ч.т.д.

2) $1+\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4\cos^4\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\pi/_4+\alpha\right)}{\cos\left(\pi/_4+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$

$=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, ч.т.д.

4) Аналогично 3).

1135. 1) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$. Решение: преобразуем левую

часть: $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=2\sin x\left(1-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\right)=2\sin x\left(\frac{3}{2}-2\sin^2 x\right)=3\sin x-4\sin^3 x$. Преобразуем

правую часть: $\sin 3x=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x+\sin x(1-2\sin^2 x)=$

$=2\sin x(1-\sin^2 x)+\sin x-2\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, ч.т.д.

2) Указание: домножьте и разделите числитель и знаменатель на $8\sin 3x$ и воспользуйтесь формулой синуса двойного угла.

2. Уравнения

1136. 1) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$. Решение: умножим обе части уравнения на 12: $3x-16+12=3x+18-2x-6$; $2x=16$, $x=8$. Ответ: $x=8$.

2) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$. Решение: раскроем скобки: $\frac{5}{3}x-\frac{35}{3}-3x-\frac{6}{7}x+\frac{48}{7}=-x-\frac{43}{3}$; $\frac{5}{3}x-3x-\frac{6}{7}x+x=-\frac{43}{3}+\frac{35}{3}-\frac{48}{7}$; $-\frac{25}{21}x=-\frac{200}{21}$, откуда $x = 8$. Ответ: $x = 8$.

1137. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0? Решение: подставим $x = 0$, тогда $-3a+8=26$; $a=-6$. Ответ: $a=-6$.

1138. При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1? Решение: подставим $x = 1$, тогда $1-5b=-14$, откуда $b = 3$. Ответ: $b = 3$.

1139. 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9=x(x+4)-(x+5)(x+2)$. Решение: раскроем скобки: $x^2+x-x^2-5x-6+9=x^2+4x-x^2-7x-10$; $-x=-13$, $x = 13$. Ответ: $x = 13$.

2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$. Решение: раскроем скобки, тогда: $2x^2+6x+2x+6+8=2x^2+x+10x+5$; $3x=9$, $x=3$. Ответ: $x=3$.

1140. 1) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9}$. Решени: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{3x-9-2x-6-4}{x^2-9}=0$; $\frac{x-19}{x^2-9}=0$, откуда $x=19$. Ответ: $x=19$.

2) $\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{11}{x^2-6x+8}$. Решение: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{5(x-4)+2(x-2)-11}{(x-2)(x-4)}=0$; $\frac{7x-35}{(x-2)(x-4)}=0$, откуда $x = 5$. Ответ: $x = 5$.

1141. 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x$. Решение: преобразуем уравнение: $(a-b)x-(a+b)x=a^2$; $-2bx=a^2$, при $b\neq 0$ $x=-\frac{a^2}{2b}$. Если $b=0$ и $a\neq 0$, тогда решений нет, а если $b = 0$ и $a = 0$, то решение – любое вещественное число. Ответ: $b \neq 0$, a – любое, $x = -\frac{a^2}{2b}$; $b = 0$, $a \neq 0$ решений нет; $a = 0$, $b = 0$, x – любое.

2) $a^2x = a + b + b^2x$. Решение: преобразуем уравнение: $(a^2 - b^2)x = a + b$; $x = \frac{a+b}{a^2 - b^2}$; $x = \frac{1}{a-b}$. Ответ: если $a = -b$, x – любое; если $a = b \neq 0$ решений нет; если $a \neq |b|$, $x = \frac{1}{a-b}$.

1142. 1) $x^2 - 2x - 15 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

2) $3x^2 + 4x - 4 = 0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = -2$, $x_2 = 2/3$. Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 2/3$.

1143. 1) $(x-3)(x-2) = 6(x-3)$. Решение: заметим, что $x = 3$ – корень. Если $x \neq 3$, то разделим обе части на $x - 3 \neq 0$, тогда $x - 2 = 6$, откуда $x = 8$.
Ответ: $x = 3$, $x = 8$.

2) $x^2 - \frac{11x}{6} + \frac{1}{2} = 0$. Решение: умножим уравнение на 6: $6x^2 - 11x + 3 = 0$, тогда $x_1 = 1/3$, $x_2 = 3/2$. Ответ: $x_1 = 1/3$, $x_2 = 3/2$.

1144. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 0$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 1$. Домножим обе части уравнения на $(x+1)(x-1) \neq 0$, тогда $x(x-1) + x(x+1) = 0$; $2x^2 = 0$, откуда $x = 0$.
Ответ: $x = 0$.
2) Аналогично 1).

1145. 1) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{7}{2+x} = \frac{7x^2 - 28}{x^2 - 4} + \frac{18}{2-x}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 2$. Домножим уравнение на $x^2 - 4 \neq 0$: $(3x-8)(x-2) - 7x^2 + 28 + 18(x+2) = 0$; $x^2 - x - 20 = 0$, отсюда $x = 5$, $x = -4$. Ответ: $x = 5$, $x = -4$.

2) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{12}{x^2 - 9} = \frac{2-x}{3-x}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm 3$. Домножим уравнение на $x^2 - 9 \neq 0$: $(x+1)(x-3) - 12 + (2-x)(x+3) = 0$; $-3x - 9 = 0$, отсюда $x = -3$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: корней нет.

1146. $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3 + 1}$. Решение: О.О.У. $x \neq -1$. При $x \neq -1$ домножим обе части уравнения на $x^3 + 1 \neq 0$. Тогда $2(x+1) - (x^2 - x + 1) = 2x - 1$;

$-x^2+x+2=0$, откуда $x=-1$ (не удовлтеворяет ООУ) и $x=2$. Ответ: $x=2$.

1147. 1) Указание: домножьте уравнение на $x \neq 0$.

2) Указание: домножьте уравнение на $x+2 \neq 0$.

1148. 1) $x^4-11x^2+30=0$. Решение: сделаем замену $u=x^2$, тогда $u^2-11u+30=0$, отсюда $u=5$, $u=6$. Т.е. $x=\pm\sqrt{5}$ и $x=\pm\sqrt{6}$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{5}$, $x=\pm\sqrt{6}$.

2) $2x^4-5x^2+2=0$. Решение: сделаем замену $u=x^2$, тогда $2u^2-5u+2=0$, отсюда $u=2$, $u=1/2$. Т.е. $x=\pm\sqrt{2}$ и $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1149. 1) Указание: сделайте замену $u=x^{-1}$, тогда $u^2=x^{-2}$.

2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$. Решение: сделаем замену $x^2-x=u$, тогда $u^2-8u+12=0$, откуда $u=2$ или $u=6$. Из уравнения $x^2-x=2$ находим корни $x=-1$ и $x=2$, а из уравнения $x^2-x=6$ корни $x=3$ и $x=-2$.

Ответ: $x=-1$, $x=-2$, $x=2$, $x=3$.

1150. 1) Указание: $x^2+ax+\frac{a^2}{4}-b^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-b^2=\left(x+\frac{a}{2}-b\right)\left(x+\frac{a}{2}+b\right)$.

2) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$. Решение: О.О.У. $x \neq \pm\frac{a}{2}$. Приведем все к общему знаменателю: $\frac{2x(2x+a)-x(2x-a)-5a^2}{(2x-a)(2x+a)}=0$; $\frac{2x^2+3ax-5a^2}{(2x-a)(2x+a)}=0$;

$\frac{(x-a)(2x+5a)}{(2x-a)(2x+a)}=0$. Откуда $x=a$ или $x=-2{,}5a$. При $a \neq 0$ оба корня удовлетворяют области определения, при $a=0$ оба корни посторонние.

Ответ: при $a \neq 0$ $x=a$, $x=-2{,}5a$; при $a=0$ решений нет.

1151. Указание: $ax^2+bx+c=\begin{cases}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}, \text{ при } a>0\\ -\left(\sqrt{-a}x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}, \text{ при } a<0.\end{cases}$

1152. Решение: т.к. $a \neq 0$, то $x^2+\frac{b}{a}x+1=0$. Тогда по теореме Виета

$x_1 \cdot x_2 = 1$, т.е. $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$, ч.т.д.

1153. 1) $|2x-3|=7$. Решение: по определению модуля $2x - 3 = 7$ или $2x - 3 = -7$. Откуда $x = 5$ или $x = -2$. Ответ: $x = 5, x = -2$.

2) $|x+6|=2x$. Решение: т.к. левая часть неотрицательна, необходимо $x \geq 0$. Тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим: $(x+6)^2 = 4x^2$; $3x^2-12x-36=0$; $x^2-4x-12=0$, откуда $x = 6$ и $x = -2$ (не удовлетворяет условию $x \geq 0$). Ответ: $x = 6$.

3) $2x-7=|x-4|$. Решение: т.к. правая часть неотрицательна, необходимо $2x-7 \geq 0$; $x \geq 3{,}5$. Тогда, возведя обе части уравнения в квадрат, получим: $4x^2-28x+49=x^2-8x+16$; $3x^2-20x+33=0$, откуда $x = 3$ (не удовлетворяет условию $x \geq 3{,}5$) и $x = 3\dfrac{2}{3}$. Ответ: $x = 3\dfrac{2}{3}$.

1154. 1) Аналогично задаче 1153 п.3).

2) $2|x-2|=|x|-1$. Решение: перепишем уравнение в виде $2|x-2|+1=|x|$. Т.к. обе части положительны, возведем в квадрат, получим $4(x-2)^2+4|x-2|+1=x^2$; $3x^2-16x+17+4|x-2|=0$. При $x \geq 2$, $3x^2-16x+17+4x-8=0$; $3x^2-12x+9=0$, откуда $x = 1$ (не удовлетворяет условию $x \geq 2$) и $x=3$. При $x < 2$, $3x^2-16x+17-4x+8=0$; $3x^2-20x+25=0$, откуда $x = 5$ (не удовлетворяет условию $x < 2$) и $x = 5/3$. Ответ: $x = 5/3$, $x=3$.

1155. Указание: при $x \geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат, тогда $(x^2-3x-6)^2-4x^2=(x^2-5x-6)(x^2-x-6)$.

1156. Указание: при $x \geq 0$ возведите обе части уравнения в квадрат, тогда $(x^2-8x+5)^2-4x^2=(x^2-10x+5)(x^2-6x+5)$.

1157. 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$. Решение: О.О.У. $x \geq -3{,}5$. Т.к. левая часть неотрицательна, то уравнение имеет смысл только при $x \geq -2$. При таком условии возведем обе части уравнения в квадрат, получим: $2x+7=x^2+4x+4$; $x^2+2x-3=0$. Откуда $x = 1$ и $x = -3$ (не удовлетворяет условию $x \geq -2$). Ответ: $x = 1$.

2) Указание: перепишите уравнение в виде $\sqrt{2x-5}=2-x$. Аналогично 1).

1158. 1) $3^{x-7}=81$. Решение: преобразуем уравнение: $3^{x-7}=3^4$, тогда $x-7=4$, $x=11$. Ответ: $x=11$.

2) $2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$. Решение: преобразуем уравнение: $2^{x^2-5x+6,5}=2^{0,5}$, тогда $x^2-5x+6,5=0,5$; $x^2-5x+6=0$, отсюда $x=2$, $x=3$.

Ответ: $x=2$, $x=3$.

3) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x=2^{2x+6}$. Решение: преобразуем уравнение: $\left(4^{x-1}\right)^x=2^{2x+6}$; $\left(2^{2x-2}\right)^x=2^{2x+6}$; $2^{(2x-2)x}=2^{2x+6}$, откуда $(2x-2)x=2x+6$; $2x^2-4x-6=0$. Тогда $x=-1$ и $x=3$. Ответ: $x=-1$, $x=3$.

1159. 1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$. Решение: преобразуем уравнение: $9\cdot 9^{5x-1}-9^{5x-1}=8$; $8\cdot 9^{5x-1}=8$, откуда $9^{5x-1}=1$, т.е. $5x-1=0$, $x=0,2$. Ответ: $x=0,2$.

2) Указание: уравнение равносильно $2^x\left(2^4-1\right)=120$; $2^x=8$.

1160. 1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$. Решение: разделим обе части уравнения на $35^{\frac{1}{2}(5x+6)}\neq 0$, получим $\frac{5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}}{(5\cdot 7)^{1/2(5x+6)}}=1$. Т.е. $5^{2x+5-1/2(5x+6)}\cdot 7^{3x+1-1/2(5x+6)}=1$; $5^{-0,5x+2}\cdot 7^{0,5x-2}=1$; $\left(\frac{7}{5}\right)^{0,5x-2}=1$, откуда $0,5x-2=0$, $x=4$. Ответ: $x=4$.

2) Указание: $0,2=\frac{1}{5}=5^{-1}$. Аналогично 1).

1161. 1) Указание: данное уравнение равносильно уравнению $3-2x=3x-2$.

2) Указание: $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$, данное уравнение равносильно уравнению $x=2-x$.

3) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$. Решение: $\sqrt{8}=2^{3/2}$, $\frac{1}{16}=2^{-4}$, таким образом $2^{-3/2}=2^{4x}$, откуда $-3/2=4x$; $x=-3/8$. Ответ: $x=-3/8$.

1162. 1) Указание: $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3(1-x)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$.

2) Указание: $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=2^{x/3}\cdot 3^{x/3}=6^{x/3}$.

1163. 1) Указание: уравнение равносильно $5^{x-1}\left(5^2+5+1\right)=155$; $5^{x-1}=5$.

2) Указание: уравнение равносильно $3^{2x-1}\left(3-2-2\cdot\frac{1}{3}\right)=1$.

3) Указание: уравнение равносильно $7^{x-1}(7-1)=6$; $7^{x-1}=1$.

4) Указание: уравнение равносильно $3^x\left(3^2+1\right)=10$; $3^x=1$.

1164. 1) Указание: сделайте замену $u=3^x$, тогда $u^2-u=72$.

2) Указание: сделайте замену $u=2^x$, тогда $u^2-2u=48$.

1165. 1) Указание: сделайте замену $u=\log_2 x$, тогда $u^2-3u+2=0$.

2) Указание: сделайте замену $u=\log_3 x$, тогда $u^2+5=2\cdot 3u$.

1166. 1) $\ln\frac{2}{x+1}=\ln(x+2)$. Решение: О.О.У. $x>-1$. Преобразуем уравнение:

$\ln\frac{2}{x+1}-\ln(x+2)=0$; $\ln\frac{2}{(x+1)(x+2)}=0$, т.е. $\frac{2}{(x+1)(x+2)}=1$. Откуда

$x^2+3x+2=2$, $x=0$ и $x=-3$ (не удовлетворяет О.О.). Ответ: $x=0$.

2) $\log_3\sqrt{3x-6}-\log_3\sqrt{x-3}=1$. Решение: О.О.У. $3x-6\geq 0, x-3\geq 0$, т.е.

$x\geq 3$. Преобразуем уравнение: $\log_3\frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{x-3}}=\log_3 3$; $\log_3\frac{3x-6}{x-3}=2\log_3 3$,

т.е. $\frac{3x-6}{x-3}=9$, $6x=21$, $x=3{,}5$. Ответ: $x=3{,}5$.

1167. 1) Указание: О.О.У. $x>0$, тогда уравнение равносильно $\frac{1}{2}+x=\frac{1}{2x}$.

2) Указание: О.О.У. $0<x<\sqrt{6}$, тогда уравнение равносильно $x^2=6-x^2$.

1168. 1) $\log_2(2x-18)+\log_2(x-9)=5$. Решение: О.О.У. $x>9$, тогда

$\log_2(2x-18)(x-9)=5$; $\log_2 2(x-9)^2=5$; $1+2\log_2(x-9)=5$; $\log_2(x-9)=2$.
Отсюда находим $x-9=4$, $x=13$. Ответ: $x=13$.
2) Аналогично 1).

1169. 1) $5^{\log_5 x^2}-6\cdot 5^{\log_5 x}+5=0$. Решение: О.О.У. $x>0$. Сделаем замену

$u=5^{\log_3 x}>0$, тогда $5^{\log_5 x^2}=5^{2\log_3 x}=\left(5^{\log_3 x}\right)^2=u^2$. Откуда $u^2-6u+5=0$,

т.е. $u=5$ и $u=1$. Тогда $5^{\log_3 x}=5$ или $5^{\log_3 x}=1$, т.е. $\log_3 x=1$ или

$\log_3 x=0$, откуда $x=3$ или $x=1$. Ответ: $x=3$, $x=1$.

2) Указание: сделайте замену $5^{\log_5 x}=u$, тогда уравнение примет вид

$u^2-20u-125=0$.

1170. 1) $x^{\lg x}=10$. Решение: О.О.У. $x>0$. Возьмем десятичный логарифм от

правой и левой части, тогда $\lg x^{\lg x}=\lg 10$; $\lg x\lg x=1$, откуда $\lg x=1$ или

$\lg x=-1$. Т.е. $x=10$ или $x=0{,}1$. Ответ: $x=10$, $x=0{,}1$.

2) Указание: при $x>0$ возьмите логарифм по основанию 3 от обеих час-

тей уравнения, тогда $\log_3{}^2 x = 2 + \log_3 x$. Это уравнение квадратное относительно $\log_3 x$.

3) $x^{\lg x} - 1 = 10\left(1 - x^{-\lg x}\right)$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем десятичный логарифм от обеих частей равенства, получим $\lg\left(x^{\lg x} - 1\right) = \lg 10\left(\dfrac{x^{\lg x} - 1}{x^{\lg x}}\right)$; $\lg\left(x^{\lg x} - 1\right) = 1 + \lg\left(x^{\lg x} - 1\right) - \lg x^{\lg x}$; $\lg^2 x = 1$, откуда (аналогично п.1) $x = 10$ или $x = 0{,}1$. Ответ: $x = 10$; $x = 0{,}1$.

4) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$. Решение: О.О.У. $x > 0$. Возьмем натуральный логарифм от правой и левой частей, получим $\ln x^{\sqrt{x}} = \ln\sqrt{x^x}$; $\sqrt{x}\ln x = \dfrac{1}{2}\ln x^x$; $2\sqrt{x}\ln x = x\ln x$. Если $\ln x = 0$, то уравнение выполнено, т.е. $x = 1$ – решение. Если $\ln x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\ln x$, получим $\sqrt{x} = x/2$; $x = x^2/4$, откуда $x = 0$ (не удовлетворяет области определения) и $x = 4$. Ответ: $x = 1$, $x = 4$.

1171. 1) Указание: разделите обе части уравнения на $49^{x^2} \neq 0$ и сделайте замену $u = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{x^2}$. Уравнение примет вид $7u^2 - 9u + 2 = 0$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $5^{x+3} \neq 0$, тогда $5 + 3\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+3} = 4\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+3} + 4$, откуда $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+3} = 1$.

1172. 1) $\log_4\left(2 + \sqrt{x+3}\right) = 1$. Решение: О.О.У. $x \geq -3$. Тогда уравнение равносильно $2 + \sqrt{x+3} = 4$, откуда $\sqrt{x+3} = 2$, $x + 3 = 4$; $x = 1$. Ответ: $x = 1$.

2) Указание: уравнение равносильно $-\dfrac{1}{2}\log_3\left(x^2 - 2x\right) = -\dfrac{1}{2}$; $x^2 - 2x = 3$.

3) $\dfrac{1}{2}\log_3(x+1) = \log_3\sqrt{x+4} - 2\log_3\sqrt{2}$. Решение: О.О.У. $\begin{cases} x > -1 \\ x > -4 \end{cases}$, откуда $x > -1$. Тогда уравнение равносильно $\log_3\sqrt{x+1} - \log_3\sqrt{x+4} = \log_3\dfrac{1}{2}$,

$\log_3\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}} = \log_3\dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x+1}{x+4} = \dfrac{1}{4}$, $4x + 4 = x + 4$, $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

1173. 1) $x^{1+\lg x}=10x$. Решение: перепишем уравнение в виде $x\cdot x^{\lg x}=10x$. Заметим, что $x=0$ – корень. При $x\neq 0$ разделим обе части на x, получим $x^{\lg x}=10$, т.е. $x=10$, $x=0{,}1$ (см. задачу 1170 п.1).

Ответ: $x=0$, $x=10$, $x=0{,}1$.

2) Аналогично задаче 1170 п.1).

3) $\log_2(17-2^x)+\log_2(2^x+15)=8$. Решение: сделаем замену переменной: $u=2^x$, тогда О.О.У. $-15<u<17$ и уравнение равносильно уравнению $\log_2(17-u)(u+15)=\log_2 2^8$, $(17-u)(u+15)=256$, $-u^2+2u+255=256$, $u^2-2u+1=0$, откуда $u=1$. Т.е. $2^x=1$, $x=0$. Ответ: $x=0$.

4) Указание: сделайте замену $u=2^x>0$. Аналогично 3).

1174. Могут ли корни уравнения $(x-m)(x-n)=k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k – действительные числа? Решение: преобразуем уравнение: $x^2-x(m+n)-(mn+k^2)=0$, тогда его корни имеют вид $x_{1,2}=\dfrac{(m+n)\pm\sqrt{(m+n)^2-4(mn+k^2)}}{2}$. Для того, чтобы корни были мнимые необходимо и достаточно $\begin{cases}m+n=0\\(m+n)^2-4(mn+k^2)<0\end{cases}$, $\begin{cases}m=-n\\-4(k^2-n^2)<0\end{cases}$, $\begin{cases}m=-n\\k^2-n^2>0\end{cases}$. Ответ: $m=-n$, $k^2>n^2$.

1175. 1) $z^2+4z+19=0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения $z_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 19}}{2}=-2\pm\sqrt{-15}=-2\pm i\sqrt{15}$. Ответ: $z_{1,2}=-2\pm i\sqrt{15}$.

2) $z^2-2z+3=0$. Решение: по формуле корней квадратного уравнения $z_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 3}}{2}=1\pm\sqrt{-2}=1\pm i\sqrt{2}$. Ответ: $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$.

1176. 1) См. рис. 190; 2) См. рис. 191; 3) См. рис. 192; 4) См. рис. 193; 5) См. рис. 194; 6) См. рис. 195.

1177. Аналогично задаче 1 §40.

1178. 1) $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$. Решение $2x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

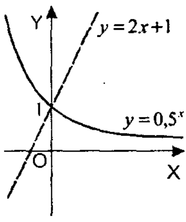

Рис. 190

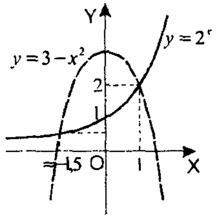

Рис. 191

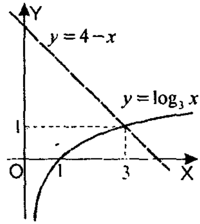

Рис. 192

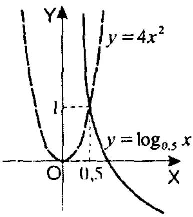

Рис. 193

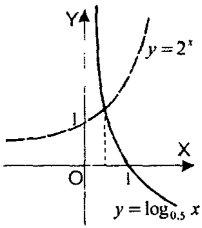

Рис. 194

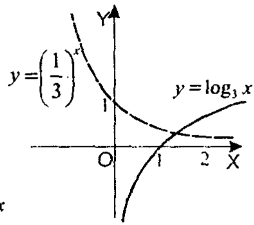

Рис. 195

2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение $3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3) $2\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$. Решение $\mathrm{tg}\,x = -\frac{5}{2}$; $x = -\mathrm{arctg}\frac{5}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = -\mathrm{arctg}\frac{5}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1179. 1) Указание: уравнение является квадратным относительно $\cos x$.

2) Указание: уравнение является квадратным относительно $\mathrm{tg}\,x$.

1180. 1) Указание: уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} \sin x = 3/4 \\ \cos x = -3/4 \end{array}\right.$.

2) Указание: уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,x = -3 \\ \mathrm{tg}\,x = -1 \end{array}\right.$.

1181. 1) $\sin 2x = 3\sin x\cos^2 x$. Решение: преобразуем уравнение, получим:

$\sin 2x - \frac{3}{2}\sin 2x\cos x = 0$, $\sin 2x\left(1-\frac{3}{2}\cos x\right) = 0$, откуда $\sin 2x = 0$ или $\cos x = \frac{2}{3}$. Т.е. $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение:

$2\sin 2x\cos 2x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$; $\cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0$.

3) Указание: преобразуем уравнение: $\cos 2x + \cos^2 x = 0$; $3\cos^2 x - 1 = 0$.

4) Указание: преобразуйте уравнение:

$2\sin x\cos x - \cos^2 x = \cos x(2\sin x - \cos x) = 0$.

1182. 1) Указание: преобразуйте уравнение: $2\sin x\cos x - 3\cos x = 0$; $\cos x(2\sin x - 3) = 0$.

2) Указание: уравнение равносильно $2\sin 2x\cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot 1$; $2\sin 2x\cos 2x = \cos 2x$.

3) Указание: ур-ние равносильно $\cos^2 x - \sin^2 x = 4\sin 2x$; $\cos 2x = 4\sin 2x$.

4) Указание: уравнение равносильно $2\cos x - 2\sin x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$; $(\cos x - \sin x)(2 + \cos x + \sin x) = 0$.

1183. 1) Указание: воспользуйтесь формулой суммы косинусов.

2) Указание: воспользуйтесь формулой разности косинусов.

3) Указание: $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x\cos x$.

4) Указание: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$.

1184. 1) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -2$.

2) Указание: уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

1185. 1) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$. Решение: преобразуем уравнение: $4\sin^4 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 2$; $2\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$; $\sin^2 x = 1$, $\cos^2 x = 1$, откуда $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Ответ: $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{2x}{3}$.

1186. 1) Указание: $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2) Указание: $6\sin x + 5\cos x = \sqrt{36+25}\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{61}}$, $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{61}}$.

1187. 1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0$. Решение: сделаем замену $u = \operatorname{tg} x$, тогда $u^3 + u^2 - 2u - 2 = 0$, $(u^2 - 2)(u+1) = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$. Тогда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $1 - \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x$, $(1-\cos x)\cos x = \sin x(1 - \cos x)$, откуда $\cos x = 1$ или $\cos x = \sin x$.

1188. 1) $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$. Решение: преобразуем уравнение: $\sin x + 2\sin x\cos x - \cos x - 2\cos^2 x = (\sin x - \cos x)(1 + 2\cos x)$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Указание: уравнение равносильно: $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$;

$(\cos x - \sin x)(2\cos x + 2\sin x - \sqrt{6}) = 0$; $(\cos x - \sin x)\left(2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{6}\right) = 0$.

1189. $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \cos x + \sin x$. Решение: преобразуем уравнение:

$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$, тогда $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$.

Если $\cos x = -\sin x$, то это решение, тогда $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Иначе $\frac{1}{\cos x - \sin x} = 1$, тогда $\cos x - \sin x = 1$, $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

1190. 1) Указание: $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 0$.

2) Указание: $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$4\sin^2 x\cos^2 x-2\cos^2 x=0$, $2\cos^2 x(2\sin^2 x-1)=0$.

3) Указание: $8\sin x\cos 2x\cos x=4\sin 2x\cos 2x=2\sin 4x$.

4) Указание: $4\sin x\cos x\cos 2x=2\sin 2x\cos 2x=\sin 4x$.

1191. 1) $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=\cos 2x$. Решение: преобразуем уравнение: $\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=\cos 2x$, тогда $2\cos^2 x=0$, т.е. $\cos x=0$, $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $2\sin^2 x-1=\cos^4 x-\sin^4 x$, $-\cos 2x=\cos 2x$, см. 1).

1192. 1) Указание: $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\cos x\sin x(\cos^2 x+\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, откуда $\operatorname{tg} 2x=2$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, тогда $\frac{2}{\cos^2 x}=2(1+\operatorname{tg}^2 x)$. Сделайте замену $u=\operatorname{tg} x$.

1193. 1) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, тогда $\frac{3}{\cos^2 x}=3(1+\operatorname{tg}^2 x)$. Сделайте замену $u=\operatorname{tg} x$.

2) Указание: разделите обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, тогда $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$. Сделайте замену $u=\operatorname{tg} x$.

1194. 1) Указание: $\sin 5x-\sin 3x=2\sin x\cos 4x$, аналогично 4).

2) Указание: $\cos 6x+\cos 2x=2\cos 4x\cos 2x$.

3) Аналогично 4).

4) $\sin x=\cos 5x$. Решение: преобразуем уравнение:

$\sin x-\cos 5x=\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$. Тогда $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ или $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$, откуда $3x-\frac{\pi}{4}=\pi k$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{\pi}{4}-2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

1195. 1) Указание: $\sin x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x$.

2) Указание: $\cos 7x-\cos 3x=-2\sin 5x\sin 2x$.

1196. Указание: преобразуйте произведение в сумму.

1197. 1) Указание: $5+\sin 2x=4+(\sin x+\cos x)^2$, замените $u=\sin x+\cos x$, уравнение примет вид $4+u^2=5u$.

2) Указание: преобразуйте уравнение: $2-3\sin x\cos x+2(\cos x-\sin x)=0$.

Сделайте замену $u=\cos x-\sin x$; $2-3\frac{1-u^2}{2}+2u=0$.

1198. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$. Решение: преобразуем уравнение:

$$(\sin x+\sin 4x)+(\sin 2x+\sin 3x)=2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{5x}{2}\cdot 2\cos 2x\cos x.$$ Т.е. $\sin\frac{5x}{2}=0$,

$\cos 2x=0$ или $\cos x=0$. Ответ: $x=\frac{2\pi k}{5}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{5}$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

1199. 1) $\mathrm{tg}^2 3x-4\sin^2 3x=0$. Решение: О.О.У. $\cos^2 3x\neq 0$, т.е. $\cos^2 3x\neq 1$.

Преобразуем уравнение $\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}-4\sin^2 3x=0$, $\sin^2 3x\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-4\right)=0$,

откуда $\sin 3x=0$ или $\cos 3x=\pm\frac{1}{2}$. Тогда $3x=\pi k$ или $3x=\frac{\pi}{3}+\pi k$.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{3}$, $x=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Указание: преобразуйте уравнение $\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}$,

$\sin^2 x=\cos^2 x+\sin x$, $2\sin^2 x-\sin x-1=0$.

3) Указание: домножим обе части уравнения на $\sin x\neq 0$, получим $\mathrm{ctg}\,x(\cos x+\sin x)=1$, аналогично 4).

4) $4\,\mathrm{ctg}^2 x=5-\frac{9}{\sin x}$. Решение: так как $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$, то

$\frac{4}{\sin^2 x}-4=5-\frac{9}{\sin x}$, $\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{9}{\sin x}-9=0$. Откуда $\frac{1}{\sin x}=-3$, $\frac{1}{\sin x}=\frac{3}{4}$.

Второе уравнение не имеет смысла, а из первого уравнения $\sin x=-\frac{1}{3}$,

$x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

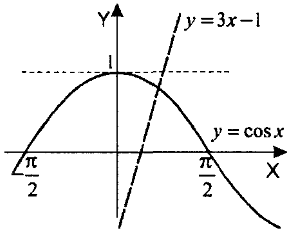

Рис. 196

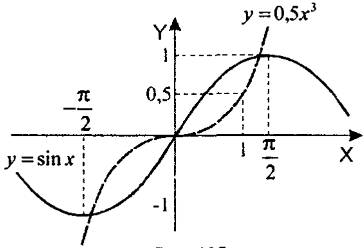

Рис. 197

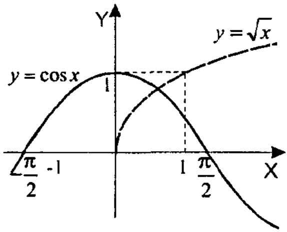

Рис. 198

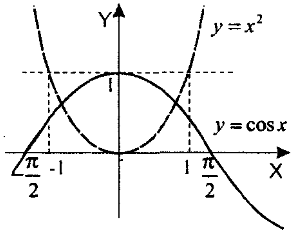

Рис. 199

1200. 1) Указание: уравнение равносильно $\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=3\operatorname{tg}x$.

2) Указание: уравнение равносильно $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{\operatorname{ctg}x}=2\operatorname{ctg}x$.

3) Указание: воспользуйтесь формулами тангенса суммы и разности.

4) $\operatorname{tg}(2x+1)\operatorname{ctg}(x+1)=1$. Решение: преобразуем уравнение, получим:

$\operatorname{tg}(2x+1)=\operatorname{tg}(x+(x+1))=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(x+1)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+1)}$, тогда $\dfrac{(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(x+1))\operatorname{ctg}(x+1)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+1)}=1$,

$\dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}(x+1)+1}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+1)}=1$, $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}(x+1)+1=1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+1)$,

$\operatorname{tg}x(\operatorname{ctg}(x+1)+\operatorname{tg}(x+1))=0$. Выражение в скобках не обращается в нуль, т.е. $\operatorname{tg}x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

1201. 1) См. рис. 196; 2) См. рис. 197;
3) См. рис. 198; 4) См. рис. 199.

3. Неравенства

1202. Аналогично задаче 1203.

1203. 1) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}<2$. Решение: $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}x-\frac{5}{12}+\frac{1}{6}x<2$, $\frac{5}{24}x>-\frac{23}{12}$,

$x>-\frac{23}{12}\cdot\frac{24}{5}=-9{,}2$. Ответ: $x>-9{,}2$.

2) Аналогично 1),

1204. При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{5x-4}{7x+5}$. Решение: необходимо решить неравенство $\frac{5x-4}{7x+5}>0$. Решая методом интервалов, получаем $x<-\frac{5}{7}$, $x>\frac{4}{5}$. Ответ: $x<-\frac{5}{7}$, $x>\frac{4}{5}$.

2)–4) Аналогично 3).

1205. Аналогично задаче 1204.

1206. 1) $\frac{5x+4}{x-3}<4$. Решение: $\frac{5x+4}{x-3}-4=\frac{5x+4-4x+12}{x-3}=\frac{x+16}{x-3}$, т.е.

$\frac{x+16}{x-3}<0$, откуда $-16<x<3$. Ответ: $-16<x<3$.

2), 3) Аналогично 1).

1207–1209. Указание: неравенства решаются методом интервалов.

1210. При каких значениях x выражение $\lg(x^2+8x+15)$ не имеет смысла?

Решение: необходимо $x^2+8x+15\le 0$, $(x+3)(x+5)\le 0$. Решаем методом интервалов, находим $-5\le x\le -3$. Ответ: $-5\le x\le -3$.

1211. Указание: необходимо, чтобы $D>0$, аналогично задаче 1213.

1212. Указание: необходимо, чтобы $D<0$, аналогично задаче 1213.

1213. При каком наибольшем целом значении x выражение $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$ принимает отрицательные значения? Решение: необходимо решить неравенство $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}<0$, $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{(x-2)(x-7)}<0$, откуда $2<x<7$. Наибольшее целое x, которое попадает в этот промежуток, $x=6$. Ответ: $x=6$.

1214. Аналогично задаче 1213.

1215. 1) $|2x-3|<x$. Решение: рассмотрим два случая: $x\ge 1{,}5$, тогда $2x-3<$

x, $x < 3$. Т.е. $1{,}5 \le x < 3$. Если $x < 1{,}5$, то $3 - 2x < x$, откуда $x > 1$; окончательно $1 < x < 3$. Ответ: $1 < x < 3$.

2) Аналогично 1).

3) $|x^2 - 7x + 12| \le 6$. Решение: т.к. обе части неравенства положительны, возведем неравенство в квадрат, получим: $(x^2 - 7x + 12)^2 - 36 \le 0$, $(x^2 - 7x + 12 - 6)(x^2 - 7x + 12 + 6) \le 0$, $(x^2 - 7x + 18)(x - 6)(x - 1) \le 0$, откуда $1 \le x \le 6$. Ответ: $1 \le x \le 6$.

4)–6) Аналогично 3).

1216. Указание: воспользуйтесь свойством показательной функции.

1217. 1) Аналогично 2).

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \frac{1}{27}$. Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$, тогда по свойству показательной функции $|x-2| < 3$. Т.е. $-3 < x - 2 < 3$; $-1 < x < 5$. Ответ: $-1 < x < 5$.

1218. Аналогично задаче 1217.

1219. 1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \ge \sqrt[3]{3}$. Решение: преобразуем неравенство: $3^{x+1} \cdot 3^{2x-1} \ge 3^{1/3}$, $3^{3x} \ge 3^{1/3}$. Тогда по свойству показательной функции $3x \ge \frac{1}{3}$, $x \ge \frac{1}{9}$. Ответ: $x \ge \frac{1}{9}$.

2) Указание: $3^{x+1} + 3^{x-1} = 3^{x-1}(3^2 + 1) = 10 \cdot 3^{x-1}$.

1220. 1) Указание: $2^{2x} - 4^{x-1} + 8^{\frac{2x}{3}} \cdot 2^{-4} = 2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} =$
$= 2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) = 13 \cdot 2^{2x-4}$.

2) Указание: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2}$; $2^{x+2}(1 - 2 - 4) > 5^{x-2}(125 - 1)$;
$\frac{2^{x+2}}{5^{x-2}} > -\frac{124}{5}$.

1221. 1), 2) Указание: воспользуйтесь свойствами показательной функции. Аналогично 3).

3) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$. Решение: т.к. $8{,}4 > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x-3}{x^2+6x+11} < 0$, откуда $x < 3$ (т.к. $x^2 + 6x + 11 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$). Ответ: $x < 3$.

4) Аналогично 5).

5) $3^{4-3x}-35\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geq 0$. Решение: сделаем замену $u=3^{2-3x}>0$. Тогда $9u-\frac{35}{u}+6\geq 0$. Домножим обе части неравенства на $u>0$, получим $9u^2+6u-35\geq 0$. Откуда $u\leq -\frac{7}{3}$ (не удовлетворяет условию $u>0$) и $u\geq\frac{5}{3}$. Тогда $3^{2-3x}\geq\frac{5}{3}$, $2-3x\geq\log_3\frac{5}{3}$, откуда $x\leq 1-\frac{1}{3}\log_3 5$.

Ответ: $x\leq 1-\frac{1}{3}\log_3 5$.

1222. 1) Указание: данное неравенство равносильно неравенству $\log_2\frac{x-1}{x+2}<-2$.

2) Указание: данное неравенство равносильно неравенству $\log_2\left(x^2-4x+3{,}5\right)>-1$.

1223. 1) $\log_6(2-x)<\log_6(2x+5)$. Решение: О.О.Н. $-2{,}5<x<2$. Т.к. $6>1$, то неравенство равносильно $2-x<2x+5$; $3x>-3$, $x>-1$. С учетом области определения $-1<x<2$. Ответ: $-1<x<2$.

2) Аналогично 1).

1224. 1) Указание: неравенство равносильно $0\leq\lg x<\frac{1}{4}$.

2) Указание: на области определения неравенство равносильно $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{2x+6}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$.

1225. Аналогично задаче 1226.

1226. 1) $\lg_{0{,}5}\left(x^2-5x+6\right)>-1$. Решение: область определения неравенства $x^2-5x+6>0$, т.е. $x<2,\ x>3$. Тогда по свойству логарифмической функции $x^2-5x+6<(0{,}5)^{-1}$, $x^2-5x+6<2$, $x^2-5x+4<0$, откуда $1<x<4$, с учетом ОО: $1<x<2,\ 3<x<4$. Ответ: $1<x<2,\ 3<x<4$.

2) Аналогично 1).

1227. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x-1}\right)\leq 0$. Решение: данное неравенство равносильно неравенству $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x-1}\ge 1$, откуда $0<\frac{3x+1}{x-1}\le\frac{1}{2}$. Т.е. $\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\le 0$,

$\frac{6x+2-x+1}{2x-2}\le 0$, $\frac{5x+3}{2x-2}\le 0$, откуда $-\frac{3}{5}\le x<1$. Из неравенства

$\frac{3x+1}{x-1}>0$ получаем $x>1$ или $x<-\frac{1}{3}$. Окончательно $-\frac{3}{5}<x<-\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{3}{5}<x<-\frac{1}{3}$.

1228. 1) $(x^2-4)\log_{0,5}x>0$. Решение: область определения неравенства $x>0$. Тогда необходимо $\begin{cases}x^2-4>0\\ \log_{0,5}x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2-4<0\\ \log_{0,5}x<0\end{cases}$. Откуда $x<-2$ или $1<x<2$. Ответ: $x<-2$, $1<x<2$.

2) Аналогично 1).

1229. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $(1+\lg x)\lg x<2$.

2) Указание: неравенство равносильно неравенству $2\lg^2 x<1+\lg x$.

3) Указание: пусть $u=3^x$, тогда $3+\log_3 u>\log_3(26+u)$.

4) Указание: пусть $u=5^x$, тогда $3-\log_5 u<\log_5(20+u)$.

1230. Указание: воспользуйтесь формулами из §37.

1231. Аналогично задачам 716, 725, 737.

1232. Аналогично задачам 716, 725, 737.

1233. 1) Указание: $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2}$.

2) $\frac{a^3+b^3}{2}>\frac{(a+b)^2}{2}$, если $a>0,\ b>0,\ a\ne b$. Решение: докажем неравенство $\frac{a^3+b^3}{2}-\frac{(a+b)^2}{2}>0$. Произведем равносильные преобразования:

$\frac{4a^3+4b^3-a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{8}>0$, $\frac{3}{8}(a^3-a^2b-ab^2+b^3)>0$,

$(a-b)^2(a+b)>0$, что верно по условию, ч.т.д.

1234. 1) Указание: $(a+b)(ab+1)-4ab=b(a-1)^2+a(b-1)^2$.

2) Указание: $a^4+6a^2b^2+b^4-4ab(a^2+b^2)=(a^2+b^2-2ab)^2=(a-b)^4$.

1235. 1) Указание: из неравенства 1233 п.1) следует: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Докажите, что $\frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\ge 3$ (сделайте замену $u=\sqrt{\frac{b}{a}}$).

2) Указание: $2a^2+b^2+c^2-2a(b+c)=(a-b)^2+(a-c)^2$.

4. Системы уравнений и неравенств

1236. 1) $\begin{cases}5x-7y=3\\6x+5y=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25x-35y=15\\42x+35y=119\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}67x=134\\6x+5y=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Решение: домножим первое уравнение системы на 5, второе на 7 и сложим. Ответ: (2; 1).

2) $\begin{cases}2x-y-13=0\\x+2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y-26=0\\2x+4y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-25=0\\5y+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

Решение: к первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе; а из второго, умноженного на 2, вычтем первое. Ответ: (5; –3).

1237. 1) $\begin{cases}\frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{2}=10\\\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-y)-5(x+y)=2x+5y\\2x+5y=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+12y=0\\2x+5y=100\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5(100-5y)+24y=0\\x=\frac{100-5y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=500\\x=-1200\end{cases}$

Решение: приравняем левые части уравнений, умноженные на 10; второе уравнение системы умножим на 10. Ответ: (–1200; 500).

2) $\begin{cases}\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6\\\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=6\\(x-y)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=8\\x-y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}$

Решение: сложим уравнения системы; затем из первого уравнения, разделенного на 2 вычтем второе. Ответ: (7; 1)

1238. 1) $\begin{cases} y+5=x^2 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y+5 \\ y+5+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y+5 \\ y^2+y-20=0, \end{cases}$

отсюда $y_1=-5$, $y_2=4$; $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 3$. Ответ: (0; –5), (3; 4), (–3; 4).

2) $\begin{cases} xy=16 \\ \dfrac{x}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=64 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 8 \\ y=\pm 2 \end{cases}$

Решение: перемножим уравнения системы (получим $x^2=64$); затем разделим первое уравнение на второе (получим $y^2=4$). Заметим, что значения x и y должны иметь один знак. Ответ: (8; 2), (–8; –2).

3) $\begin{cases} x^2+2y^2=96 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2+2y^2=96 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=16 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2}=\pm 4 \\ x=2y \end{cases}$

Решение: подставим $x = 2y$ в первое уравнение. Ответ: (8; 4), (–8; –4).

1239. 1) $\begin{cases} x^2-y^2=13 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=14 \\ 2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases}$

Решение: т.к. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, разделим первое уравнение на второе. Ответ: (7; 6)

2) $\begin{cases} x^2-3y=-5 \\ 7x+3y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-23+7x=-5 \\ 3y=23-7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18=0 \\ 3y=23-7x \end{cases}$

Решение: подставим $3y = 23 - 7x$ в первое уравнение. Тогда $x_1=2$, $x_2=-9$. Ответ: (2, 3), (–9; $28\frac{2}{3}$).

1240. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-\dfrac{1}{u}=\dfrac{3}{2} \\ u^2+1=\dfrac{20}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2-3u-2=0 \\ y^2=\dfrac{20}{u^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2, u_2=-\dfrac{1}{2} \\ y_1^2=4, y_2^2=16 \end{cases}$

Решение: сделаем замену $u=\dfrac{x}{y}$; второе уравнение разделим на y^2.

Ответ: (4; 2), (–4; –2), (2; 4), (–2; 4).

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{10}{3} \\ x^2-y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{10}{3} \\ 1-u^2=\dfrac{8}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2-10u+3=0 \\ x^2=\dfrac{8}{1-u^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3, u_2=\dfrac{1}{3} \\ x_1{}^2=-1, x_2{}^2=9 \end{cases}$

Решение: сделаем замену $u=\dfrac{y}{x}$; второе уравнение разделим на x^2. Т.к. уравнение $x^2=-1$ действительных корней не имеет, то $x=\pm\sqrt{9}$, тогда $y=\pm\sqrt{x^2-8}$. Ответ: (3; 1), (–3; –1).

3) $\begin{cases} x^2=13x+4y \\ y^2=4x+13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=9x-9y \\ y^2=4x+13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-9)=0 \\ y^2=4x+13y \end{cases}$

Решение: рассмотрим разность уравнений системы, тогда полученная сисмтема равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} x=y \\ y^2=4x+13y \end{cases}$ или $\begin{cases} x=9-y \\ y^2=4x+13y \end{cases}$, тогда $\begin{cases} x_1=0, x_2=17 \\ y_1=0, y_2=17 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=12, x_2=-3 \\ y_1=-3, y_2=12 \end{cases}$

Ответ: (0, 0); (17, 17); (12, –3); (–3, 12).

4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40 \\ 2x^2+y^2+3x=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x=-12 \\ y^2=52-2x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3, x_2=4 \\ y_1{}^2=25, y_2{}^2=8 \end{cases}$

Решение: рассмотрим разность уравнений системы.

Ответ: (3, 5); (3, –5); (4, $2\sqrt{2}$); (4, $-2\sqrt{2}$).

1241. 1) $\begin{cases} 2^{x+y}=32 \\ 3^{3y-x}=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 3y-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -5+3y+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: (3, 2).

2) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77 \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{x}{2}}+2^y=11 \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 3^{\frac{x}{2}}=18 \\ 2\cdot 2^y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Решение: т.к. $3^x-2^{2y}=\left(3^{\frac{x}{2}}-2^y\right)\left(3^{\frac{x}{2}}+2^y\right)$, разделим первое уравнение системы на второе. Ответ: (4, 1).

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^{4+x} = 576 \\ y-x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 36 \\ y = 4+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$

Ответ: (2, 6).

4) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg xy = 4 \\ \lg x^{\lg y} = \lg 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 10^4 \\ 4\lg x - \lg^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10^4 : x \\ \lg x = 1 \text{ или } \lg x = 3 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x > 0$, $y > 0$. Преобразовав систему получаем: $x_1 = 10$, $y_1 = 1000$; $x_2 = 1000$, $y_2 = 10$. Ответ: (10, 10^3); (10^3, 10).

1242. 1) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \dfrac{x}{y^2} = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 = 1, y_2^2 = 4 \\ x_1 = 1, x_2 = 4 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. С учетом области определения получаем: $y = 2$, $x = 4$ и $y = 1$, $x = 1$. Ответ: (1; 1), (4; 2).

2) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^4 = 16 \\ \log_2 xy^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{64}{x^2} = 16 \\ y^2 = \dfrac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ y^2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Решение: О.О.С. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. С учетом области определения получаем: $x = 2^{\frac{3}{2}}$, $y = 2^{\frac{3}{4}}$. Ответ: ($2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{3}{4}}$).

1243. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 18 \\ 2\sqrt{y} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 9 \\ \sqrt{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 81 \\ y = 49 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x \ge 0$, $y \ge 0$. Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе. Ответ: (81; 49).

2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 20 \\ 2\sqrt{y} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 10 \\ \sqrt{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 81 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x \ge 0$, $y \ge 0$. Сложим уравнения, затем вычтем из второго первое. Ответ: (100; 81).

1244. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y+2\\ \sqrt{2x}=2+2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+2\\ \sqrt{2x}=2 \text{ или } \sqrt{2x}=-1\end{cases}$

Решение: возведем первое уравнение в квадрат. Подставим это во второе уравнение. Т.к. значение $\sqrt{2x}=-1$ невозможно, получаем решение (2; 0). Т.к. мы не находили О.О.С., то необходимо сделать проверку, которая показывает, что решение – постороннее. Ответ: решений нет.

2) $\begin{cases}\sqrt{3y+x+1}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-3y\\ \sqrt{8-7y}=7y-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-3y\\ 7y^2-11y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0, x_2=\dfrac{21}{11}\\ y_1=1, y_2=\dfrac{4}{11}\end{cases}$

Решение: возведем в квадрат первое уравнение, выразим x через y и подставим во второе уравнение. Возведем второе уравнение в квадрат, получаем решения (0; 1), $(\frac{21}{11}; \frac{4}{11})$. Проверка показывает, что второе решение – постороннее. Ответ: (0; 1).

1245. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \sin^2 x+2\sin x\cos y=\dfrac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ (\sin x+\cos y)^2=\dfrac{3}{4}+\cos^2 y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos^2 y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Решение: прибавим к обоим частям второго уравнения $\cos^2 y$ и подставим значение $\sin x+\cos y=1$. Тогда получаем: $\cos y=\pm\frac{1}{2}$, $\sin x=\frac{1}{2}$ или

$\sin x=\frac{3}{2}$ (не имеет смысла).

Ответ: $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $k,n\in \mathbf{Z}$.

2) Указание: $\cos^2 x+2\sin x\sin y+4\cos^2 y=1-\sin^2 x+2\sin x\sin y+4-4\sin^2 y$.

Подставьте $\sin x=\frac{1}{2}-\sin y$ в преобразованное второе уравнение.

1246. 1) $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2}\\ \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2}\\ \dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2}\\ \sin y\cos x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Решение: О.О.С. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y \neq \pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Вычтем преобразованные уравнения, получим $\sin(x-y) = 0$, откуда $x - y = \pi k$. Если сложить уравнения, то $\sin(x+y) = -1$, откуда $x + y = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$. Тогда $\begin{cases} x - y = \pi k \\ x + y = 2\pi n - \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

$x = \pi n + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$, $y = \pi n - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}$ – удовлетворяет области определения.

Ответ: $\left(\pi n + \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) Аналогично 1).

1247. $\begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x+5}{3} - \frac{x}{6} < 3 - \frac{x+4}{2} \\ 1 - \frac{2x-8}{3} + \frac{4-3x}{2} < 2x - \frac{x+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9-10-x < 18-3x-12 \\ 6-4x+28-9x < 12x-2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 25 \\ 23x > 38 \end{cases}$

Тогда наименьшее целое решение системы $x = 2$, а наибольшее $x = 12$.
Ответ: $x = 2$, $x = 12$.

1248. $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{x+2}{4} < \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{2} \\ \frac{x-2}{3} > 1 + \frac{x-5}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+6}{20} > \frac{18-5x}{6} \\ 5x - 10 > 10 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 53x > 162 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3\frac{3}{53} \\ x > 5 \end{cases}$

Ответ: $x > 5$.

5. Текстовые задачи

1249. Решение: пусть l м – длина эскалатора, тогда скорость пассажира $\frac{l}{3}$ м/мин, а суммарная скорость пассажира и эскалатора $\frac{l}{45/60} = \frac{4l}{3}$ м/мин.

Следовательно, скорость эскалатора равна $\frac{4l}{3} - \frac{l}{3} = l$ м/мин, т.е. неподвижно стоящий человек поднимется за 1 мин. Ответ: 1 мин.

1250. Решение: пусть v км/ч – скорость теплохода, тогда его скорость по течению равна $v + 2$ км/ч, а против течения $v - 2$ км/ч. Соответственно, расстояние между пристанями равно $7 \cdot (v+2) = 9 \cdot (v-2)$. Т.е. $v = 16$ км/ч, тогда расстояние равно $v = 7 \cdot (16+2) = 126$ км. Ответ: 126 км.

1251. Решение: пусть v км/ч – скорость парохода, S км – расстояние, тогда $v=\dfrac{S}{2{,}25\cdot 24}$, а $v+2{,}5=\dfrac{S}{2\cdot 24}$, откуда $\dfrac{S}{2\cdot 24}-2{,}5=\dfrac{S}{2{,}25\cdot 24}$. Т.е. расстояние $S=1080$ км. Ответ: 1080 км.

1252. Решение: за один день оба рабочих вместе выполняют $\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}$ часть работы. Следовательно всю работу они выполнят за $1:\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{48}\right)=16$ дн.

Ответ: 16 дней.

1253. Решение: пусть x га – площадь целинных земель, тогда $30x$ ц собрали с целинных земель, а с остальной площади – $22\cdot(174-x)$ ц. Следовательно $4556=30x+22\cdot(174-x)$, откуда $x=91$ га. Ответ: 91 га.

1254. Решение: пусть x и y – искомые числа, тогда необходимо решить систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{1}{24}\\ x+y=5(x-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{{}^3\!/_2\,y-y}{{}^3\!/_2\,y^2}=\dfrac{1}{24}\\ x={}^3\!/_2\,y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24y=3y^2\\ x={}^3\!/_2\,y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=0,y_2=8\\ x_1=0,x_2=12\end{cases}$$

Решение (0, 0) постороннее. Ответ: (8, 12).

1255. Решение: необходимо решите систему уравнений (где $x,y,z\in\mathbf{Z}$):

$$\begin{cases}{}^1\!/_x+{}^1\!/_y+{}^1\!/_z=1\\ {}^1\!/_x-{}^1\!/_y={}^1\!/_z\\ {}^1\!/_x+{}^1\!/_y={}^5\!/_z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}{}^5\!/_z+{}^1\!/_z=1\\ {}^2\!/_x={}^6\!/_z\\ {}^2\!/_y={}^4\!/_z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=6\\ x={}^z\!/_3\\ y={}^z\!/_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=6\\ x=2\\ y=3\end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{6}$.

1256. Решение: пусть бригада изготавливала x деталей в день, тогда намеченный срок равен $\dfrac{360}{x-9}$ дням. Следовательно $\dfrac{360}{x-9}-1=\dfrac{360\cdot 1{,}05}{x}$. Отсюда $x^2+9x-3402=0$, т.е. $x_1=-63$ (посторонний корень) и $x_2=54$. Значит к сроку бригада изготовит $\dfrac{360}{54-9}\cdot 54=432$ дет. Ответ: 432 детали.

1257. Указание: пусть $v_к$ – скорость катера, $v_п$ – скорость плота (реки).

Тогда необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{36}{v_к + v_п} = \dfrac{36}{v_п} + 10 \\ \dfrac{30}{v_к + v_п} + \dfrac{20}{v_к - v_п} = \dfrac{10}{v_п} \end{cases}$$

1258. Указание: пусть x – количество билетов, купленных первой организацией, тогда $\dfrac{300}{x} - 3 = \dfrac{180}{x-5}$.

1259. Аналогично задаче 1257.

1260. Аналогично задаче 1253.

1261. Указание: пусть – длина шага ученика в см., тогда $\dfrac{700}{x} = \dfrac{700}{x+20} + 400$.

1262. Указание: решите систему $\begin{cases} b_1 + 9 = b_1 q^2 \\ b_1 q^3 + 18 = b_1 q \end{cases}$.

1263. Указание: воспользуйтесь формулой $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

1264. Указание: по свойствам геометрической и арифметической прогрессий можно обозначить x, $\sqrt{xy}$, y, $2y - \sqrt{xy}$.

1265. Указание: по свойству арифметической прогрессии $b_1 q^4 + b_1 q^{10} = 2b_1 q^7$, откуда $1 + q^6 = 2q^3$.

1266. Указание: $\dfrac{(a_1 + 4d)(a_1 + 5d)}{a_1(a_1 + d)} = 33$, откуда можно найти $\dfrac{a_1}{d}$. Тогда

$$\frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{\dfrac{a_1}{d} + 4}{\dfrac{a_1}{d} + 1}$$

1267. Указание: площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $^1\!/_4$.

6. Функции и графики

1268. Указание: решите уравнение $y(-2) = 3$.

1269. Указание: решите уравнение $y(-1) = 4$.

1270. Найти коэффициенты k и b функции $y = kx + b$, если ее график проходит через точки A и B.

1) $A(-1; -2)$, $B(3; 2)$. Решение: $\begin{cases} y(-1) = -2 \\ y(3) = 2 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} -k + b = -2 \\ 3k + b = 2 \end{cases}$, тогда, вычитая из первого уравнения второе, находим $4k = 4$; $k = 1$, $b = -1$.
Ответ: $y = x - 1$.
2)–4) Аналогично 1).

1271. Указание: пусть уравнение прямой $y = kx + b$, тогда:

$$k = \frac{x_c - x_в}{y_c - y_к} = \frac{3+2}{0-2} = -2{,}5.$$

1272. Указание: подставьте координаты точки в уравнение прямой.

1273. 3) Указание: расстояние до начала координат равно длине высоты, опущенной на гипотенузу треугольника AOB.

1274. Указание: решите неравенство 1) $3x - 1 > 0$; 2) $3x - 1 < 0$.

1275. Указание: решите неравенство 1) $-2x + 1 > 0$; 2) $-2x + 1 < 0$.

1276. Указание: решите неравенство $2x - 1 < 3x - 2$.

1277. Указание: решите неравенство $\left(\sqrt{3} - 2\right)x - \sqrt{3} > \left(1 + \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3}$.

1278, 1279. Указание: найдите производную функции $y(x)$.

1280. 1) Ответ: нет; 2) Ответ: да.

1281. 1) См. рис. 200;
2) См. рис. 201;
3) См. рис. 202.

1282. Аналогично задаче 1283.

1283. Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить ее график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$. Решение: график функции – порабола с вершиной в точке $\left(\frac{3}{4}; 3\frac{1}{8}\right)$, оси направлены вниз. $-2x^2 + 3x + 2 < 0$ при $x > 2$ или $x < -\frac{1}{2}$.
2) См. п.1).
3) См. п.1).

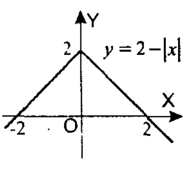

Рис. 200

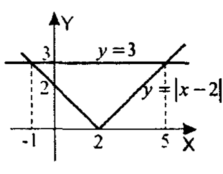

Рис. 201

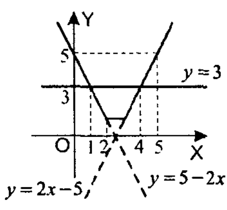

Рис. 202

4) Указание: решите неравенство $-2x^2+3x+2<3x+2$.

5) Записать уравнение касательных к пораболе в точках с ординатой, равной 3. Решение: найдем абсциссу точки касания: $-2x^2+3x+2=3$, откуда $x_0=1$ или $x_0=\frac{1}{2}$. Общий вид уравнения касательной в точке x_0: $y=y'(x)(x-x_0)+y(x_0)$, $y=(-4x_0+3)(x-x_0)+(-2x_0^2+3x_0+2)$, т.е. в точке $x_0=1$ $y=-x+4$, в точке $x_0=\frac{1}{2}$ $y=x+2{,}5$.

Ответ: $y=-x+4$; $y=x+2{,}5$.

1284. Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y=x^2$ и $y=x+6$. Решение: решим уравнение $x^2=x+6$. Уравнение имеет решения, следовательно графики пересекаются. Ответ: да.

1285. Выяснить, является ли четной или нечетной функция:

1)–3) Аналогично 4).

4) $y=\left|\ln\frac{5+x}{5-x}\right|$. Решение: область определения функции $-5<x<5$ симметрична. Рассмотрим $y(-x)=\left|\ln\frac{5-x}{5+x}\right|=\left|\ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^{-1}\right|=\left|-\ln\frac{5-x}{5+x}\right|=\left|\ln\frac{5-x}{5+x}\right|$, т.е. функция четная. Ответ: четная.

1286, 1287. Аналогично задаче 1285.

1288, 1289. Аналогично задачам 705 и 706.

1290. 1) Указание: функция четная.

2) Указание: функция нечетная.

1291. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=ax^2+bx-4$, если $y(1)=0$ и $y(4)=0$. Решение: найдем a и b: $\begin{cases}a+b-4=0\\16a+4b-4=0\end{cases}$, откуда $a=-1$, $b=5$. Т.е. . Наибольшее значение равно $y(2{,}5)=2{,}25$. Наименьшего значения не существует.

Ответ: 2,25; наименьшего значения не существует.

1292. 1) Указание: $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Указание: $2\cos 2x+\sin^2 x=2\cos 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x$.

1293. Указание: точка пересечения с осью OY $(0;y(0))$; решите уравнение $y(x)=0$, тогда получатся точки пересечения с осью OX.

1294. Указание: найдите a, b, c, см. задачу 1291.

1295. Указание: $y^2 = 25 - x^2$, $y > 0$. Т.е. $x^2 + y^2 = 25$ – это верхняя полуокружность окружности с центром в точке (0; 0) и радиусом 5.

1298. 1) Указание: график $y = 2^{x-1} - 3$ получается из графика $y = 2^x$ сдвигом на 1 единицу вправо и 3 единицы вниз.

2) Указание: график $y = \log_2(x+2) + 3$ получается из графика $y = \log_2 x$ сдвигом на 2 единицы влево и 3 единицы вверх.

1299. 1) Указание: $6 - 3x > 0$.

2) Указание: $2x + 4 > 0$.

3) Указание: $\cos 2x \neq 0$.

4) Указание: $\frac{x}{4} \neq \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

1300. 1) $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$. Решение: необходимо $\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \geq 0$, т.е. $x < -3, x \geq 3$.

Ответ: $x < -3, x \geq 3$.

2) Указание: решите неравенство $\log_3 \frac{2x+1}{x-6} \geq 0$.

1301. 1) Указание: решите неравенство $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} \geq 0$ методом интервалов.

2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - 1}$. Решение: необходимо $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq 0$. Кроме того, $x > 3$ из области определения логарифма. Т.е. $\begin{cases} x > 3 \\ x - 3 \leq 0{,}5 \end{cases}$, $3 < x \leq 3{,}5$.

Ответ: $3 < x \leq 3{,}5$.

1302. Аналогично задаче 1301.

1303. 1), 2) Указание: найдите вершину пораболы и значение в ней.

3) $y = e^x + 1$. Решение: e^x пробегает весь луч $(0; +\infty)$ при $x \in \mathbf{R}$, тогда $e^x + 1$ пробегает весь луч $(1; +\infty)$. Ответ: $(1; +\infty)$.

4) Аналогично 3).

1304. 1) Аналогично 2).

2) $y = 0{,}5\cos x + \sin x$. Решение:

$$0{,}5\cos x + \sin x = \sqrt{1 + 0{,}25}\left(\frac{0{,}5}{0{,}5\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{0{,}5\sqrt{5}}\sin x\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(x - \varphi),$$ где

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Т.к. $-1 \leq \cos(x - \varphi) \leq 1$, то $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

1305. Указание: угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

1306. Указание: угол равен $\operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg} f'(x_0)$.

1307. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $f(x) = \frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0 = \frac{1}{4}$. Решение: $\left(\frac{3}{4x\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{3}{4}x^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

Тогда уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, т.е.

$y = -\frac{9}{8}\cdot 32\left(x - \frac{1}{4}\right) + 6$, $y = -36x + 15$. Ответ: $y = -36x + 15$.

2) Аналогично 1).

1308. Указание: аналогично задаче 1307, точка пересечения с осью OY соответствует $x_0 = 0$.

1309. Указание: $3x^2 - 1 = 2$, откуда $x_0 = \pm 1$. См. задачу 1305.

1310. Прямая $y = 4x - 3$ является касательной к пораболе $y = 6 - 2x + x^2$. Найти координаты точки касания. Решение: найдем точку, такую что $f'(x) = 4$, $f'(x) = -2 + 2x$, $-2 + 2x = 4$, откуда $x = 3$. Тогда $y = f(x) = 9$. Ответ: (3; 9).

1312. Указание: аналогично задаче 1311; угловой коэффициент равен $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, т.е. $f'(x_0) = 1$.

1313. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $f(x) = x\ln 2x$, $x_0 = 0{,}5$. Решение: $f'(x) = \ln 2x + 2$,

$y = f'(0{,}5)(x - 0{,}5) + f(0{,}5)$, $y = 2(x - 0{,}5) + 0$, $y = 2x - 1$. Ответ: $y = 2x - 1$.

1314. Указание: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 7$; угол равен $\operatorname{arctg} y'(2)$.

1315. Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y = x^2e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ образует с осью OX. Решение: тангенс угла равен угловому коэффициенту касательной в точке $x_0 = 1$.

$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$, $y'(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$. Ответ: $\frac{1}{e}$.

1316. Аналогично задаче 1315.

1317. Указание: найдем точки пересечения: $\frac{x^3+1}{3} = 0$, откуда $x_0 = -1$. Аналогично задаче 1313.

1318. Указание: аналогично 1313; $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

1319. Найти промежутки монотонности функции:

$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Решение: $y' = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$. Т.е. $y' > 0$ при $x < 0$ (т.е. функция возрастает) и $y' < 0$ при $x > 0$ (т.е. функция убывает).

Ответ: функция возрастает при $x < 0$; функция убывает при $x > 0$.

1320. 1) $y = (x-1)^3(x-2)^2$. Решение: $y' = 3(x-1)^2(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^3 =$

$= (x-2)(x-1)^2(3x-6+2x-2) = (x-2)(x-1)^2(5x-8)$. Т.е. точки экстремума 2 и 1,6 (т.к. в них меняет знак). Ответ: $x_0 = 2$ и $x_0 = 1{,}6$.

2) Аналогично 1).

1321. Аналогично задаче 1320.

1322. 1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$. Решение: найдем точки экстремума: $y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) =$

$= 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$. Точки экстремума: $\cos x = 1/2$ т.е. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Из них в промежуток $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ попадает только $\frac{\pi}{3}$. $y(0) = 0$;

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и –2.

1323, 1324. Аналогично задаче 1322.

1325. См. задачу 978.

1326–1328. Аналогично задачам 963–965; 973–975.

1329. Указание: $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x + C$.

1330. Аналогично задаче 1322.

1331. Указание: аналогично задаче 1322. $y' = \frac{6\ln^2 x}{x} - \frac{18\ln x}{x} + \frac{12}{x}$.

1332. Аналогично задаче 951.

1333, 1334. Аналогично задаче 950.

1335. Указание: необходимо $x_0 = -\frac{p}{2} = 5$ и $y(x_0) = 1$.

1336. Указание: если h – высота конуса, то $V(h) = \frac{\pi h\left(20^2 - h^2\right)}{3}$, $0 \le h \le 20$.

1337. Аналогично задаче 1336.

1338–1343. Аналогично задаче 1344.

1344. Консервная жестяная банка заданного объема должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания и высотой расход жести будет наименьшим? Решение: пусть V – объем, r – радиус основания. Тогда $V = \pi r^2 h$, откуда $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Площадь боковой поверхности $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$, т.е. $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ответ: $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

1345–1346. Аналогично задаче 1344.

1347. Найти экстремумы функции.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$. Решение: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$. Т.е. $x_0 = -3$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума.

Ответ: $x_0 = -3$, $x_0 = 1$.

2) Аналогично 1).

1348. Указание: $y' = 3x^2 - 3$, т.е. $x_0 = -1$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума. См. рис. 203.

1349. Указание: $y' = 3x^2 - 10x - 1$. Уравнение касательной:

$y = y'(4)(x-4) + y(4)$, $y = 7(x-4) - 15$, $y = 7x - 43$.

1350. Аналогично 1351.

1351. 1) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$. Решение: функция $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$ имеет корни $x = 0$ и

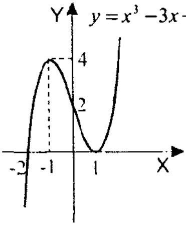

Рис. 203

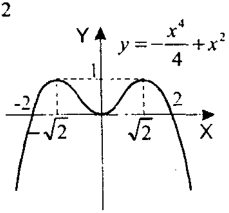

Рис. 204

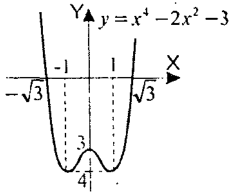

Рис. 205

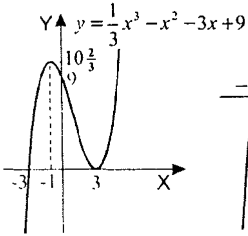

Рис. 206

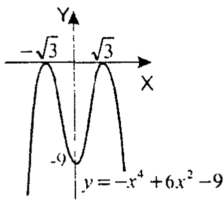

Рис. 207

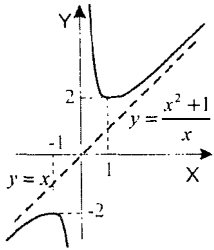

Рис. 208

$x = \pm 2$. Исследуем функцию на экстремумы: $y' = -x^3 + 2x = -x(x^2 - 2)$. Т.е. $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ – точки максимума, $x = 0$ – точка минимума. Эскиз графика см. на рис. 204.

2) Аналогично 1), см. рис. 205.

1352. 1) Аналогично задаче 1350. См. рис. 206.

2) Указание: $y = -(x^2 - 3)^2$. Аналогично задаче 1350. См. рис. 207.

3) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Решение: область определения функции $x \neq 0$. Функция не имеет нулей. Исследуем поведение функции при $x \to \infty$: $y = x + \frac{1}{x}$, т.е. при $x \to \infty$ $y(x) \to x$. Исследуем функцию на экстремум: $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, т.е. $x_0 = -1$ – точка максимума, $x_0 = 1$ – точка минимума. См. рис. 208.

4) Аналогично 3). См. рис. 209.

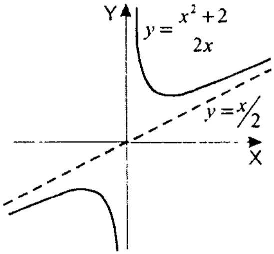

Рис. 209

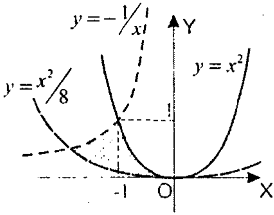

Рис. 210

1353. 1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=3-x$, $y=0$. Решение: найдем координаты точек пересечения графиков: $\sqrt{x-1}=3-x$, при $x\le 3$ $x-1=x^2-6x+9$, $x^2-7x+10=0$, откуда $x=5$ (не удовлетворяет условию $x\le 3$) и $x=2$. Тогда

$$S=\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx+\int_2^3(3-x)dx=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3=\frac{2}{3}+9-4{,}5-6+2=1\frac{1}{6}.$$

Ответ: $S=1\frac{1}{6}$.

2) $y=-{}^1\!/_x$, $y=x^2$, $y={}^{x^2}\!/_8$. Решение: найдем координаты точек пересечения $-\frac{1}{x}=x^2$, откуда $x=-1$ и $-\frac{1}{x}=\frac{x^2}{8}$, откуда $x=-2$. Тогда

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx-\int_{-2}^{0}\frac{x^2}{8}\cdot dx=-\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}+\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{24}\Big|_{-2}^{0}=-\ln(-1)+\ln(-2)+\frac{1}{3}-\frac{8}{24}=\ln 2.$$

См. рис. 210. Ответ: $S=\ln 2$.

1354. Аналогично задаче 1353.

1355. 1) Указание: $S=\int_2^9\sqrt{x}\,dx$.

2) Указание: $S=\int_{-1}^{2}(x+5)dx-\int_{-1}^{2}(3+x^2)dx$.

1356. 1) Указание: см. рис. 211, $S=\int_{-1}^{2}(9-x)^2dx-\int_{-1}^{2}\left((x-1)^2-4\right)dx$.

2) Указание: $S=\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx-\int_0^1 x^2dx$.

1357. 1) Указание: $S=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4}\cos x dx$.

2) Указание: $S=\int\limits_{-1}^{1}3^x dx=\int\limits_{-1}^{1}e^{x\ln 3}dx=\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{1}$.

7. Производная и интеграл

1358. Указание: 1) $f'(x)=3x^2-x+1$; 2) $f'(x)=\frac{1/x\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$;

3) $f'(x)=-3x^{-4}+4x^{-3}+3$; 4) $f'(x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}$.

1359. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0.

1) $f(x)=\sin 2x-x$. Решение: $f'(x)=2\cos 2x-1=0$. Т.е. $\cos 2x=\frac{1}{2}$, откуда $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

2) Аналогично 1).

3) $f(x)=(2x-1)^3$. Решение: $f'(x)=3\cdot 2(2x-1)^2$, т.е. $f'(x)=0$ при $x=1/2$. Ответ: $x=1/2$.

4) Аналогично 3).

1360. Указание: $f'(x)=2(3x^2+1)+6x(2x-3)$.

1361. Указание: решите неравенство $3x^2-3x-18<0$.

1362. Указание: скорость $v(t)=h'(t)=v_0-9{,}8t$. Пуля поднимается вверх до тех пор, пока ее скорость больше нуля, т.е. в момент остановки $v(t)=0$.

1363. Указание: пусть $\alpha(t)$ – угол поворота. Тогда $\alpha(t)=Ct^3$ и $\alpha(2)=2\pi$, откуда $C=\frac{\pi}{4}$. Т.е. $\alpha(t)=\frac{\pi}{4}t^3$. Угловая скорость $\omega(t)=\alpha'(t)$.

1364. 1) $y=\frac{x^5-3x^3+2x^2-x+3}{x^3}$. Решение: $y=x^2-3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}$, тогда $y'=2x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{9}{x^4}$. Ответ: $y'=2x-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{9}{x^4}$.

2) Указание: аналогично 1), $y = 6x^{5/6}$.

1365. 1) $\left(\dfrac{3x^2-2x+1}{x+1}\right)' = \dfrac{(6x-2)(x+1)-1\cdot(3x^2-2x+1)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{6x^2+4x-2-3x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+6x-3}{(x+1)^2}$.

2) Аналогично 1).

1366. 1) $y' = 2\cdot 2(2x+1)\sqrt{x-1} + \dfrac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{8(2x+1)(x-1)+(2x+1)^2}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{(2x+1)(10x-7)}{2\sqrt{x-1}}$

2) $y' = 2x\sqrt[3]{(x+1)^2} + x^2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = \dfrac{4x(x+1)+2x^2}{3\sqrt[3]{x+1}} = \dfrac{6x^2+4x}{3\sqrt[3]{x+1}}$.

1367. Указание: $f'(x) = (x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2) = 3x^2-12x+11$.

1368. 1) Указание: $f'(x) = 2xe^{3-2x} - 2e^{3-2x}\cdot x^2 = 2xe^{3-2x}(1-x)$.

2) Указание: $f'(x) = \dfrac{2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}}{e^{2(1-x)}} = \dfrac{x^2+2x}{e^{1-x}}$.

1369. Указание: $f'(x) = \dfrac{2\cos 2x(1-\sin 2x)+2\cos 2x(1+\sin 2x)}{(1-\sin 2x)^2} = \dfrac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$.

1370. Указание: решите неравенство $3x^2+2x+\sqrt{3} \le \sqrt{3}$.

1371. Аналогично задаче 992.

1372. 1) Указание: по таблице находим первообразную:

$F(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1| + C$.

2) Указание: по таблице находим первообразную: $F(x) = \dfrac{3}{4}\ln|4x-1| + C$.

1373. 1) $\displaystyle\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \int_2^9 (x-1)^{1/3}dx = \frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big|_2^9 = \frac{3}{4}\cdot 2^4 - \frac{3}{4}\cdot 1 = 11{,}25$.

Ответ: 11,25.

2) Указание: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}(2\cos^2 x - 1)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x\,dx$.

3) Указание: $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx = \int_3^4\left(x+2+\frac{7}{x-2}\right)dx$.

1374. 1)–5) Аналогично задаче 1373 п.1).

6) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{5-4x}dx=-\frac{2}{4}\ln|5-4x|\Big|_{-1}^{1}=-\frac{2}{4}\ln 1+\frac{2}{4}\ln 9=\ln 3$. Ответ: $\ln 3$.

8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах

Гуманитарные классы

1375. 1) Решить уравнение $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ и указать любой его положительный корень. Решение: $3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, откуда $3x=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, т.е. $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Положительный корень, например $x=\frac{7\pi}{36}$. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $x=\frac{7\pi}{36}$.

2) Решить неравенство $\log_2(3-2x)<-1$. Решение: область определения неравенства $3-2x>0$, т.е. $x<1{,}5$. По свойству логарифмической функции $3-2x<\frac{1}{2}$, т.е. $x>\frac{5}{4}$. С учетом области определения $1{,}25<x<1{,}5$. Ответ: $1{,}25<x<1{,}5$.

3) Указание: преобразуйте выражение $2^{3a+2}=2^{-a^2}$.

4) Указание: $S=\int\limits_0^4 x(4-x)dx=\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)dx$.

5) Найти область определения функции: $y=\sqrt{4-\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-3}}$. Решение: т.к. квадратный корень определен только для неотрицательных чисел, то $4-\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-3}\ge 0$, $\frac{4(x+1)(x-3)-9(x-3)+(x+1)}{(x+1)(x-3)}\ge 0$, $\frac{4x^2-16x+16}{(x+1)(x-3)}\ge 0$, $\frac{4(x-2)^2}{(x+1)(x-3)}\ge 0$. Решая методом интервалов, находим $x>3$, $x<-1$ и $x=2$. Ответ: $x>3$, $x<-1$, $x=2$.

6) При каком значении a наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + a$ на отрезке [–2; 0] равно 5? Решение: Найдем наибольшее значение функции на промежутке [–2; 0]. $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. Т.е. экстремальные точки $x_0 = -1$ и $x_0 = 1$ (не попадает в заданный промежуток). Сравним $f(-2)$, $f(-1)$ и $f(0)$. $f(-2) = a - 2$, $f(-1) = a + 2$ и $f(0) = a$. Т.к. $a - 2 < a < a + 2$ при всех значениях a, то необходимо $a + 2 = 5$, откуда $a = 3$. Ответ: $a = 3$.

1376. 1) Указание: $\sin x = -1$ и $\sin x = 5$ (постороннее решение).

2) Указание: $f'(x) = 6x(1-x) - 3x^2 = 6x - 9x^2 = 3x(2-3x)$. Сравните значения $f(0)$, $f(1)$ и $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

3) Решить уравнение: $\lg x = \lg 3 - \lg(3x-8)$. Решение: область определения уравнения $\begin{cases} x > 0 \\ 3x - 8 > 0 \end{cases}$, т.е. $x > 2\frac{2}{3}$. Преобразуем уравнение: $\lg x + \lg(3x-8) = \lg 3$, $\lg x(3x-8) = \lg 3$, откуда $x(3x-8) = 3$, $3x^2 - 8x - 3 = 0$, т.е. $x = 3$ и $x = -\frac{1}{3}$ (не удовлетворяет области определения).

Ответ: $x = 3$.

4) Указание: $S = 6 \cdot 9 - \int_0^6 (x-3)^2 dx = 54 - \left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^6$.

5) Решить неравенство: $\frac{(x-5)\left(2^{\frac{1}{x-1}} + 0{,}2\right)}{x+2} \le 0$. Решение: область определения неравенства $x \ne 1$, $x \ne -2$. Т.к. $2^{\frac{1}{x-1}} + 0{,}2 > 0$ при всех допустимых x, то $\frac{x-5}{x+2} \le 0$, откуда $-2 < x \le 5$. С учетом области определения $-2 < x < 1$, $1 < x \le 5$. Ответ: $-2 < x < 1$, $1 < x \le 5$.

6) Указание: графики пересекаются, если уравнение $x^2 - 4x + 2 = -2x + a$ имеет решение. Т.е. в уравнении $x^2 - 2x + (2-a) = 0$ $D \ge 0$.

Общеобравательные классы

1377. 1) Решить неравенство $2^{\log_{0,7}(1+2x)} > 4$. Решение: область определения неравенства $x > -\frac{1}{2}$. По свойству показательной функции $1 + 2x < 0{,}7^2$, т.е. $x < -0{,}15$. С учетом области определения $-0{,}5 < x < -0{,}15$.

Ответ: $-\frac{1}{2} < x < -\frac{51}{200}$.

2) Указание: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3) Решить уравнение $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$. Решение: т.к. левая часть неотрицательна, то правая часть $x^2 - 1 \ge 0$, откуда $x \ge 1$ или $x \le -1$. Тогда возведем обе части уравнения в квадрат $x^4 - 3x - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$, $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Откуда $x = 2$ или $x = -\frac{1}{2}$ (не удовлетворяет условию $x \ge 1$ или $x \le -1$). Проверка показывает, что $x = 2$ удовлетворяет области определения, т.е. корень. Ответ: $x = 2$.

4) Указание: $S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}dx - \int\limits_0^4 \frac{x}{2}dx$.

5) Указание: необходимо, чтобы уравнение $y'(x) = 0$ имело единственное решение, т.е. $D = 0$.

6) Решить уравнение: $\sin\frac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$. Решение: $x^2 - 4x + 5 =$ $= (x-2)^2 + 1 \ge 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$, а $\sin\frac{5\pi}{4}x \le 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Т.е. необходимо $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 1 \\ \sin\frac{5\pi}{4}x = 1 \end{cases}$, откуда $x = 2$. Ответ: $x = 2$.

1378. 1) Указание: $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}} = \sqrt[4]{6^{(\log_6 5)2} - 5^{\log_5 9}} = \sqrt[4]{25 - 9}$.

2) Указание: уравнение касательной $y = \frac{1}{3}e^{x_0/3}(x - x_0) + e^{x_0/3}$. Необходимо $0 = \frac{1}{3}e^{x_0/3}(0 - x_0) + e^{x_0/3}$, откуда получаем уравнение $e^{x_0/3}\left(1 - \frac{x_0}{3}\right) = 0$.

3) Решить систему уравнений: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - y\right) = 1 \\ x + y = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$. Решение: по формулам приведения преобразуем первое уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - y\right) = \cos(-\pi - y) - \cos y = -2\cos y.$$

Т.е. $-2\cos y=1$, откуда $\cos y=-\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Тогда

$x=-\frac{3\pi}{2}\mp\frac{2\pi}{3}-2\pi k$.

Ответ: $\left(-\frac{13\pi}{6}-2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{6}-2\pi k;-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) Решить неравенство $(3-x)\log_3(x+5)\le 0$. Решение: область определения неравенства $x>-5$. Тогда $\begin{cases}3-x\ge 0\\ \log_3(x+5)\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}3-x\le 0\\ \log_3(x+5)\ge 0\end{cases}$. Из первой системы $x\le -4$, а из второй $x\ge 3$. Тогда с учетом области определения $-5<x\le -4$ и $x\ge 3$. Ответ: $-5<x\le -4$, $x\ge 3$.

5) Вычислить интеграл: $\int\limits_{-6}^{6}\sqrt{36-x^2}\,dx$. Решение: рассмотрим функцию $y=\sqrt{36-x^2}$. Т.е. $y^2+x^2=36$. Т.е. данный интеграл – площадь верхнего полукруга круга $y^2+x^2\le 36$ (см. рис. 211). Тогда:

$\int\limits_{-6}^{6}\sqrt{36-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot 6^2=18\pi$. Ответ: 18π.

6) Решить уравнение: $\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решение: область определения уравнения $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Т.к. $0\le\sqrt{2-x^2}\le 2$, то возможно только $\sqrt{2-x^2}=\frac{\pi}{6}$, откуда $2-x^2=\frac{\pi^2}{36}$, $x^2=2-\frac{\pi^2}{36}$. Ответ: $x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

Профильные классы

1379. 1) Указание: $\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)=\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1+\cos 2x)$.

Сделайте замену $u=\cos 2x$.

2) Указание: область определения неравенства $x<0$. Тогда $\log_4 x^2+\log_2{}^2(-x)=\log_2(-x)+\log_2{}^2(-x)$. Сделайте замену $u=\log_2(-x)$.

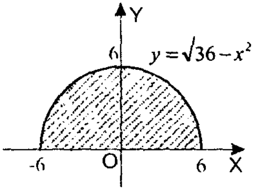

Рис. 211

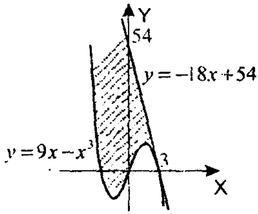

Рис. 212

3) Указание: из первого уравнения $2x+y=2$, тогда $\sqrt{2-2x}-\sqrt{x}=1$.

4) Указание: см. рис. 212. Уравнение касательной $y=-18x+54$; $-18x+54=9x-x^3$ при $x=3$ и $x=-6$. Тогда:

$$S=\int_{-6}^{3}(-18x+54)dx-\int_{-6}^{3}(9x-x^3)dx.$$

5) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2-3\sin x+4\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$.

Решение: $y'=-3\cos x-4\sin x=-5\cos(x-\varphi)$, где $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.

Тогда необходимо сравнить $y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $y\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$,

т.к. $\varphi<\frac{\pi}{3}$ (т.к. $\cos\varphi>\cos\frac{\pi}{3}$). $y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=2-3\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-2\sqrt{3}$;

$y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2-3\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-2\sqrt{3}$;

$y\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=2-3\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=2+3\cos\varphi+4\sin\varphi=7$;

$y\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=2-3\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=2-3\cos\varphi-4\sin\varphi=-3$. Тогда максимальное значение равно 7, а минимальное равно –3. Ответ: 7 и –3.

1380. 1) Указание: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, а $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$. Сделайте замену $u=\cos 2x$.

2) Найти производную функции $y=\log_{3x+4}(7x-4)$ в точке $x=2$. Решение: по формуле замены основания $y=\dfrac{\ln(7x-4)}{\ln(3x+4)}$, тогда:

$$y'=\frac{\frac{7}{7x-4}\cdot\ln(3x+4)-\frac{3}{3x+4}\cdot\ln(7x-4)}{\ln^2(3x+4)}.\quad y'(2)=\frac{\frac{7}{10}\cdot\ln 10-\frac{3}{10}\cdot\ln 10}{\ln^2 10}=\frac{0{,}4}{\ln 10}.$$

Ответ: $y'(2)=\dfrac{0{,}4}{\ln 10}$.

3) Указание: $S=\int\limits_{-3\pi/4}^{5\pi/4}(2\cos 3x-5\sin 2x+10)dx$.

4) Найти множество значений функции $y=\sqrt{6x-7}-2x$. Решение: область определения функции $x\ge 7/6$. $y'=\dfrac{3}{\sqrt{6x-7}}-2$, т.е. $y'=0$ если $2\sqrt{6x-7}=3$, $4(6x-7)=9$, $24x=37$, откуда $x=\dfrac{37}{24}$, $y\left(\dfrac{37}{24}\right)=-\dfrac{19}{12}$. При $x\to+\infty$ $y(x)$ неограниченно убывает. $y\left(\dfrac{7}{6}\right)=-\dfrac{7}{3}$, т.е. множество значений $\left(-\infty;-\dfrac{19}{12}\right]$. Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{19}{12}\right]$.

5) Указание: рассмотрите два случая: $x\ge 0$ и $x<0$.

6) На прямой $y=6x-9$ найти все такие точки, что через каждую из них проходят ровно две касательные к графику функции $y=x^2$ и угол между этими касательными равен $\dfrac{\pi}{4}$.

Решение: общий вид уравнения касательной к $y=x^2$ такой: $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2$, $y=2x_0x-x_0^2$, тогда $6x-9=2x_0x-x_0^2$, откуда $x_0=3$. Т.е. прямая $y=6x-9$ касается графика функции $y=x^2$ в точке (3; 9), см. рис. 213. Рассмотрим другую касательную к графику $y=x^2$.

Пусть x_0 – точка касания, тогда $y = 2x_0x - x_0^2$. Тогда если φ_1 – угол наклона прямой $y = 6x - 9$, а φ_2 – угол наклона прямой $y = 2x_0x - x_0^2$, то $\frac{\pi}{4} = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тогда $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}$. Т.е.

$1 = \frac{2x_0 - 6}{1 + 2x_0 \cdot 6}$, откуда $1 + 12x_0 = 2x_0 - 6$,

$10x_0 = -7$, $x_0 = -0{,}7$. Т.е. уравнение второй касательной $y = -1{,}4x - 0{,}49$. Найдем координаты точки пересечения прямых: $-1{,}4x - 0{,}49 = 6x - 9$, $7{,}4x = 8{,}51$, $x = 1{,}15$, тогда $y = -2{,}1$.

Ответ: (1,15; –2,1).

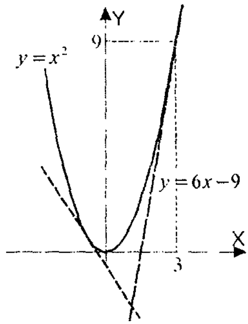

Рис. 213

Задачи для внеклассной работы

1. Разные задачи

1381. 1) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{25+10x+x^2}=8$. Решение: преобразуем уравнение $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=8$, $|x-3|+|x+5|=8$. Рассмотрим три случая:

Если $x<-5$, то $3-x-x-5=8$, $2x=-10$, откуда $x=-5$ (не удовлетворяет условию $x<-5$).

Если $-5\le x<3$, то $3-x+x+5=8$ – истинное равенство.

Если $x\ge 3$, то $x-3+x+5=8$, откуда $x=3$.

Ответ: $-5\le x\le 3$.

2) Аналогично 1).

3) Указание: домножьте обе части уравнения на $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{27+x}$ и воспользуйтесь формулой суммы кубов.

4) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$. Решение: О.О.У. $-89\le x\le 8$. Обозначим $u=\sqrt[4]{8-x}$, $v=\sqrt[4]{89+x}$. Тогда уравнение равносильно: $\begin{cases}u+v=5\\ u^4+v^4=98\end{cases}$, т.е.

$u^4+v^4=(u+v)^4-4uv(u+v)-6(uv)^2$, откуда $625-20uv-6(uv)^2=98$;

$6(uv)^2+20uv-527=0$. Т.е. $uv=6$ или $uv=-\dfrac{527}{36}$ – посторонний корень, т.к. $u\ge 0$, $v\ge 0$. Тогда $\begin{cases}u+v=5\\ uv=6\end{cases}$, т.е. $u=2, v=3$ или $u=3, v=2$. Откуда $x=-8$ или $x=-73$. Ответ: $x=-8$, $x=-73$.

1382. 2) Указание: $\sqrt{3-\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$. Введите новую неизвестную $u=\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x$.

1383. 1) Указание: $x^3-3x^2+x-3=(x^2+1)(x-3)$.

2) Указание: $x^3-3x^2-4x+12=(x^2-4)(x-3)$.

3) Указание: $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=(x+1)(x^4-6x^2-8x-3)=$

$=(x+1)(x+1)(x^3-x^2-5x-3)=(x+1)^3(x^2-2x-1)$.

4) Указание: $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=(x+1)(x^3-4x^2+2x-8)=$

$=(x+1)(x-4)(x^2+2)$.

1384. 1) Указание: $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$. Тогда $\dfrac{2}{\sin 2x}=\dfrac{2(2\cos^2 2x-1)}{2\sin 2x\cos 2x}$.

Т.к. $\sin 2x\neq 0$, то $2=\dfrac{2\cos^2 2x-1}{\cos 2x}$.

2) $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$. Решение: О.О.У. $x-\dfrac{\pi}{4}\neq\pi n$, т.е. $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Преобразуем уравнение: $\dfrac{2\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$,

$2\sin 2x\cos 2x=2(\sin^2 x-\cos^2 x)$, $\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x$.

Если $\cos 2x=0$, то это решение, т.е. $2x=\pi k+\dfrac{\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi k}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. Из них области определения удовлетворяют только те, где k нечетное.

Если $\cos 2x\neq 0$, то $\sin 2x=-1$, откуда $2x=2\pi k-\dfrac{\pi}{2}$; $x=\pi k-\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $x=\pi k-\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

1385. 1) Указание: $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos(3x-2x)}{\cos 2x\sin 2x}=\dfrac{\cos x}{\cos 2x\sin 2x}=\dfrac{1}{2\cos 2x\sin x}$.

2) Указание: $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sin 2x\sin x+\cos x\cos 2x}{\cos 2x\sin x}=\dfrac{\cos x}{\cos 2x\sin x}$.

1386. $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=2\cos 2x$. Решение: О.О.У. $\sin x\neq 0$ и $\sin 3x\neq 0$, т.е. $x\neq\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Преобразуем левую часть уравнения: $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=$

$$=\frac{(\sin 3x-\sin x)(\sin 3x+\sin x)}{\sin x\sin 3x}=\frac{2\sin x\cos 2x\cdot 2\sin 2x\cos x}{\sin x\sin 3x}=\frac{4\cos x\cos 2x\sin 2x}{\sin 3x}.$$

Т.е. $\frac{2\cos x\cos 2x\sin 2x}{\sin 3x}=\cos 2x$; $2\cos x\cos 2x\sin 2x=\cos 2x\sin 3x$.

Если $\cos 2x=0$, то $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$ – решение.

Иначе: $2\cos x\sin 2x=\sin 3x$; $2\cos x\sin 2x=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x$; $\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x=0$; $\sin(-x)=0$, т.е. $\sin x=0$ (не удовлетворяет ОО).

Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

1387. $\log_2(4\cos x+3)\log_6(4\cos x+3)=\log_2(4\cos x+3)+\log_6(4\cos x+3)$. Решение: обозначим $u=4\cos x+3$, тогда $\log_2 u\log_6 u=\log_2 u+\log_6 u$ и О.О.У. $u>0$. $\frac{\ln u}{\ln 2}\cdot\frac{\ln u}{\ln 6}=\frac{\ln u}{\ln 2}+\frac{\ln u}{\ln 6}$; $\ln^2 u=\ln u(\ln 6+\ln 2)$. Тогда $\ln u=0$ или $\ln u=\ln 6+\ln 2=\ln 12$. Тогда $u=1$ или $u=12$. Т.е. $4\cos x+3=1$ или $4\cos x+3=12$ (не имеет решений). Из первого уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

1388. Указание: если x_0 – целый корень уравнения $x^3-6x^2+11x-6=0$, то -6 кратно x_0.

1389. Указание: подставьте x_1 и x_2 в уравнение. Из полученной системы найдите m и n.

1390. 1) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\frac{5}{2}\\ x+y=a+a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\log_x y}+\log_x y=\frac{5}{2}\\ x+y=a+a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y=2 \text{ или } \log_x y=\frac{1}{2}\\ x+y=a+a^2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2 \text{ или } y=\sqrt{x}\\ x+x^2=a+a^2 \text{ или } x+\sqrt{x}=a+a^2\end{cases}$

Решение: О.О.С. $x,y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$. Тогда из уравнения $x+x^2=a+a^2$ получаем корни $x=a$ и $x=-a-1$, а из уравнения $x+\sqrt{x}=a+a^2$ получаем $\sqrt{x}=a$ и $\sqrt{x}=-a-1$.

Если $a<-1$, то $-a-1>0$, следовательно корни $x=-a-1$ и $x=(-a-1)^2$.

Если $a > -1$, то $-a-1<0$, следовательно необходимо $a>0$ и $a \neq 1$. Тогда корни $x=a$ и $x=a^2$.

Ответ: $x=-a-1$, $x=(a+1)^2$ при $a<-1$; $x=a$, $x=a^2$ при $a>0$, $a\neq 1$.

2) Указание: аналогично 1). Из второго уравнения $\log_b xy = 2$, т.е. $xy=b^2$.

1391. Указание: $x^2+y^2-2y-\cos(xy)+11-6a+a^2=$

$=x^2+(y-1)^2+(a-3)^2+(1-\cos(xy))=0$, т.к. $x^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$, $(a-3)^2\geq 0$ и $1-\cos(xy)\geq 0$, то равенство возможно только если $x=0$, $y=1$, $a=3$.

1392. 1) Указание: Из первого уравнения $y\ln x = x\ln y$. Т.к. $y>0$, то $\sqrt{x^3}\ln x = x\ln\sqrt{x^3}$; $x\sqrt{x}\ln x=\frac{3}{2}x\ln x$. Аналогично 2).

2) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y \\ y^{\sqrt{y}}=x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}\ln x=\ln y \\ \sqrt{y}\ln y=4\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y \\ \sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y=4 \end{cases}$

Решение: О.О.С. $x,y>0$. Возьмем логарифм от обеих частей уравнения. Т.к. $x>0$, то $x=2$. Ответ: (2; 4).

3) Указание: сложите уравнения, тогда $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$.

4) Указание: подставьте $x=y-\frac{1}{3}$ во второе уравнение.

5) Указание: преобразуйте второе уравнение: $\sin 2x+\sin 2y=$

$=2\sin(x+y)\cos(x-y)=0$, откуда $x+y=\pi k$ или $x-y=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

1393. $\begin{cases} 6\sin x\cos y+2\cos x\sin y=-3 \\ 5\sin x\cos y-3\cos x\sin y=1 \end{cases}$

Решение: сделаем замену $u=\sin x\cos y$, $v=\cos x\sin y$, тогда система примет вид: $\begin{cases} 6u+2v=-3 \\ 5u-3v=1 \end{cases}$, откуда $u=-\frac{1}{4}$, $v=-\frac{3}{4}$. Т.е. $\sin x\cos y=-\frac{1}{4}$, $\cos x\sin y=-\frac{3}{4}$. Тогда $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=-1$, $x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда $x=-y-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, т.е. $\sin\left(-y-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cos y=-\frac{1}{4}$;

$-\cos^2 y = -\frac{1}{4}$, откуда $y = \pi n \pm \frac{\pi}{3}$, а $x = \pi n \mp \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi n + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), \left(-\frac{\pi}{6} + \pi n + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$.

1395. 1) Указание: возьмите десятичный логарифм от обеих частей и сделайте замену $u = \lg x$.

2) Указание: $3^{\lg x^2 + 5} = 3^5 \cdot \left(3^{\lg x}\right)^2$. Сделайте замену $u = 3^{\lg x}$.

1396. Указание: О.О.У. $x \neq -1$, $x \neq -0{,}5$, $x \neq -2{,}5$. Тогда:

$\log_{|2x+2|} \frac{1-9^x}{\left(1+3^x\right)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} < 0$. Если $|2x+2| > 1$, то это неравенство равносильно $0 < \frac{1-9^x}{\left(1+3^x\right)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} < 1$, а если $0 < |2x+2| < 1$, то $\frac{1-9^x}{\left(1+3^x\right)\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)} > 1$.

1397. $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+6x^2+5x-12} > 0$. Решение: $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+6x^2+5x-12} = \frac{\left(x^2-4\right)(x+1)}{(x-1)\left(x^2+7x+12\right)} =$

$= \frac{(x+2)(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+3)(x+4)} > 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} + & & - & & + & & - & & + & & - & & + \\ & -4 & & -3 & & -2 & & -1 & & 1 & & 2 & \end{array}$$

Решаем методом интервалов.

Ответ: $x < -4$, $-3 < x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$.

1398. Указание: возведите неравенство в квадрат (с учетом О.О.Н.).

1399. Указание: $\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x(x-4)(3x-10)}}{x-4}$, тогда О.О.Н. $x > 4$ или $0 \le x \le \frac{10}{3}$. При $x > 4$ возведите неравенство в квадрат. При $0 \le x \le \frac{10}{3}$ $\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x-4} \le 10 - 3x$. Обе части этого неравенства положительны, возведите в квадрат.

1400. Указание: неравенство имеет смысл только если $4a - 3 \ge 0$. При таких a возведите неравенство в квадрат.

1401. 1) Указание: $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

2) Указание: гипербола с ассимптотами $x = 0{,}5$ и $y = 0$.

3) Указание: $y=1{,}5+\dfrac{6{,}5}{2x-3}$ – гипербола с ассимптотами $x=1{,}5$ и $y=1{,}5$.

4) $y=\dfrac{2x}{2-|x|}$. Решение: при $x\ge 0$ $y=\dfrac{2x}{2-x}=-2+\dfrac{4}{2-x}$. При $x\le 0$ $y=\dfrac{2x}{2+x}=2-\dfrac{4}{2+x}$. См. рис. 214.

1402. 1) См. рис. 215;

2) См. рис. 216;

3) См. рис. 217.

1403. 1) Указание: т.к. $\sin x<1$, то $\log_2 \sin x\le 0$, там, где $\sin x>0$.

2) Указание: О.О.Ф. $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$.

3) Указание: О.О.Ф. $x\in\left[\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

4) Указание: $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

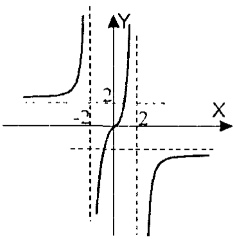

Рис. 214

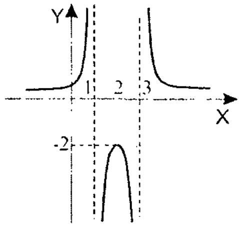

Рис. 215

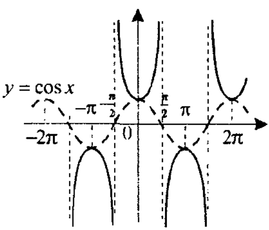

Рис. 216

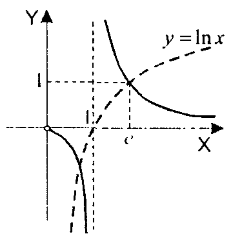

Рис. 217

1404. 1), 2) См. §43.

3) Указание: график $y=\frac{1}{\sin x}$ получается из графика $y=\frac{1}{\cos x}$ сдвигом на $\frac{\pi}{2}$ вправо. См. рис. 216.

4) Аналогично задаче 1402 п.3). См. рис. 217.

1405. $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\frac{\log_d a}{\log_d b}\cdot\frac{\log_d b}{\log_d c}\cdot\log_d c=\log_d a$, ч.т.д.

1406. Аналогично задачам 601, 602.

1407. Указание: $\cos(\arcsin x+\arccos x)=\cos(\arcsin x)\cdot x-x\sin(\arccos x)=$

$=\sqrt{1-x^2}\cdot x-x\cdot\sqrt{1-x^2}=0$. См. задачи 580 и 599.

1408. Указание: $f'(x)=2\cos 2x+8(b+2)\cos x-\left(4b^2+16b+6\right)=$

$=4\cos^2 x-2+8(b+2)\cos x-\left(4b^2+16b+6\right)=4u^2+8(b+2)u-\left(4b^2+16b+6\right)$,

где $u=\cos x$. Необходимо, чтобы $g(u)<0$ при всех $u\in[-1;1]$.

1409. Указание: касательные параллельны тогда и только тогда, когда их углы наклона совпадают, т.е. $(3\cos 5x)'=(5\cos 3x+2)'$.

1410. Указание: $R=\frac{BO\cdot OC}{BO+OC}$, т.к. треугольник прямоугольный. Аналогично задаче 1411.

1411. Решение: $y'=\frac{12}{x^2}$, тогда уравнение касательной $y=\frac{12}{x_0^2}(x-x_0)-\frac{12}{x_0}$;

$y=\frac{12}{x_0^2}x-\frac{24}{x_0}$. По условию $-4=\frac{12}{x_0^2}\cdot 3-\frac{24}{x_0}$, откуда $x_0=3$. Т.е. l задана уравнением $y=\frac{4}{3}x-8$ (см. рис. 218). Тогда обозначим $OC=y$, $\Delta EOD\sim\Delta ECB$, откуда $\frac{CB}{OD}=\frac{EC}{OD}$. $CB=y$, $OD=6$, $EC=8-y$, $OD=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Тогда $\frac{7}{6}=\frac{8-y}{10}$; $10y=48-6y$; $y=3$. Т.е. $R=3$. Ответ: $R=3$.

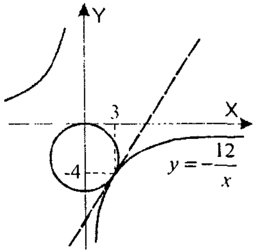

Рис. 218

1412. Указание: $AB = f(t) = \sqrt{(3t)^2 + (5-4t)^2}$. Выясните, принимает ли $f(t)$ значения, меньше 1.

1413. Указание: пусть $A(x_0, y_0)$, тогда $B(4-x_0, y_0)$, т.е. $-x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = -(4-x_0)^3 + a(4-x_0)^2 + b(4-x_0) + c$. Кроме того, $y'(x_0) = y'(4-x_0)$. Аналогично задаче 1414.

1414. Решение: из условия симметрии $\frac{x_A + x_B}{2} = -2$, т.е. $x_A + x_B = -4$. Пусть $A(x_0, y_0)$, тогда $B(-4-x_0, y_0)$. По условию $x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = (-4-x_0)^3 + a(-4-x_0)^2 + b(-4-x_0) + c$, откуда $b(x_0+2) - a(4x_0+8) + x_0^3 + 6x_0^2 + 24x_0 + 32 = 0$. Т.к. касательные параллельны, то $y'(x_0) = y'(-4-x_0)$. Т.е. $3x_0^2 + 2ax_0 + b = 3(-4-x_0)^2 + 2a(-4-x_0) + b$, откуда $a(x_0+2) - 6x_0 - 12 = 0$, т.е. $(a-6)(x_0+2) = 0$. Т.к. $x_0 \neq 2$ (иначе точки A и B совпадают), то $a = 6$. Тогда первое уравнение имеет вид $b(x_0+2) + x_0^3 + 6x_0^2 - 16 = 0$; $b(x_0+2) + (x_0+2)(x_0^2 + 4x_0 - 8) = 0$, откуда $b = -x_0^2 - 4x_0 + 8$.

Напишем уравнение касательных: $y = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0)$ и $y = y'(-4-x_0)(x+4+x_0) + y(-4-x_0)$, т.е. $y = (2x_0^2 + 8x_0 + 8)x - 2x_0^3 - 6x_0^2 + c$ и $y = (2x_0^2 + 8x_0 + 8)x + 2x_0^3 + 18x_0^2 + 48x_0 + 32 + c$. Подставим координаты данных точек, получим $\begin{cases} 1 = -2x_0^3 - 6x_0^2 + c \\ 5 = 2x_0^3 + 18x_0^2 + 48x_0 + 32 + c \end{cases}$.

Вычитая из второго уравнения первое, находим: $x_0^3 + 6x_0^2 + 12x_0 + 7 = 0$, откуда $(x_0+1)(x_0^2 + 5x_0 + 7) = 0$, т.е. $x_0 = -1$. Значит $b = -1 + 4 + 8 = 11$ и $c = 1 - 2 + 6 = 5$.

Ответ: $a = 6$, $b = 11$, $c = 5$.

1415. Указание: см. рис. 219. Аналогично задаче 1416.

1416. Указание: см. рис. 220. Такое возможно, только если A – точка минимума лежит на оси OX. Тогда $y' = -3x^2 + 2ax + b$, точка минимума $x_0 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3b}}{3}$ и $y(x_0) = 0$. Аналогично задаче 1414.

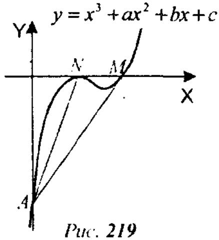

Рис. 219

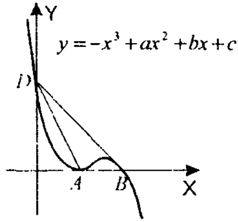

Рис. 220

1417. Решение: точки A и B принадлежат графику $y=0{,}5x^2-2x+2$. Тогда уравнение первой касательной $y=-x+1{,}5$, а уравнение второй касательной $y=2x-6$ (см. рис. 221). Эти прямые пересекаются в точке $x=2{,}5$. Поэтому искомая площадь равна:

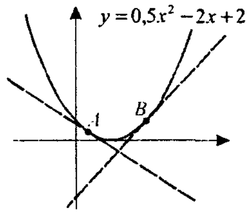

Рис. 221

$$S=\int_1^4\left(0{,}5x^2-2x+2\right)dx-\int_1^{2{,}5}\left(-x+1{,}5\right)dx-$$

$$-\int_{2{,}5}^4(2x-6)dx=\left(\frac{x^3}{6}-x^2+2x\right)\Bigg|_1^4-\left(1{,}5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^{2{,}5}-\left(x^2-6x\right)\Big|_{2{,}5}^4=1{,}125.$$

Ответ: 1,125.

1418. Указание: уравнение касательной $y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}$, т.е. эта прямая пересекает ось OX в точке $x=-a$. Тогда площадь треугольника $S(a)=\frac{1}{2}(3+a)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot 3+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$. Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке $\left[\frac{1}{2};\,2\right]$.

1419. Указание: площадь фигуры равна $\int_0^{\pi/2}\sin x dx=1$. Если α – угол наклона, то площадь треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, отсюда $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$.

2. Задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы

1420. 1) Указание: обозначьте $u=\sqrt{x+3}$. Тогда $u-\sqrt{2u^2-10}=\sqrt{3u^2-11}$. После возведения в квадрат получим $2u\sqrt{2u^2-10}=1$.

2) Указание: $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{1-(1-x)}=\dfrac{2}{x}$.

1421. Указание: рассмотрите четыре варианта раскрытия модулей.

1422. 1) Указание: разделите уравнение на $9^{1/x}\neq 0$ и введите новую неизвестную $u=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/x}$.

2) Указание: на своей ОО данное уравнение равносильно $\dfrac{2(x^2-3)}{6x-10}=1$.

3) Указание: сделайте замену $u=\sqrt{\log_2 x}$, О.О.У. $x\geq 1$. Тогда $2u^2+2=3u$.

4) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$. Решение: О.О.У. $\begin{cases}2x^2-3x-4>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$. Тогда уравнение равносильно уравнению $2x^2-3x-4=x^2$; $x^2-3x-4=0$, откуда $x=-1$ (не удовлетворяет О.О.У.) и $x=4$. Ответ: $x=4$.

1423. 1) Аналогично задаче 1422 п.4).

2) $(\log_9(7-x)+1)\log_{3-x}3=1$. Решение: О.О.У. $x<7$, $x\neq 2$. Тогда $\log_9(7-x)+1=\dfrac{1}{\log_{3-x}3}$; $\dfrac{1}{2}\log_3(7-x)+1=\log_3(3-x)$; $\log_3\dfrac{3-x}{\sqrt{7-x}}=1$, т.е.

$\dfrac{3-x}{\sqrt{7-x}}=3$, $x^2-6x+9=-9x+63$, откуда $x=6$ (не удовлетворяет О.О.У.) и $x=-9$. Ответ: $x=-9$.

1424. 1) Указание: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x=\cos 2x(2\cos x+1)$.

2) Указание: $\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x+\sin 2x=\cos x(\cos^2 x-3\cos x+1+2\sin x)$,

$$2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)=$$

$$=4\left(\left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\right)-\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\right)\right)=$$

$=4(\sin 2x-\cos x)=4\cos x(2\sin x-1)$.

3) Указание: $\sin^2 x+\cos^2 3x=1+\cos^2 3x-\cos^2 x=$

$=1-2\cos 2x\cos x\cdot 2\sin 2x\sin x=1-\sin 4x\sin 2x$.

4) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$. Решение: О.О.У. $x\neq\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. Преобразуем уравнение: $\frac{\cos x}{\sin x}+\sin 2x-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\cos x\sin 3x-\sin x\cos 3x}{\sin x\sin 3x}+\sin 2x=$

$=\sin 2x\left(\frac{1}{\sin x\sin 3x}+1\right)=0$. Тогда $\sin 2x=0$ или $\sin x\sin 3x=-1$. Из первого уравнения получаем $x=\frac{\pi k}{2}$. Из этой серии корней О.О. удовлетворяют только $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Кроме того, $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)=-1$;

$\cos 2x-\cos 4x=-2$, т.е. $\begin{cases}\cos 2x=-1\\ \cos 4x=1\end{cases}$, откуда $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

1425. 1) Указание: $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$, возведите уравнение в квадрат.

2) Указание: сделайте замену $u=\sin x-\cos x$. Тогда $\sin 2x=\frac{1-u^2}{2}$.

1426. $\frac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}-\frac{1}{3}=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Решение: $\cos x-\cos 3x=2\sin x\sin 2x$, откуда О.О.У. $x\neq\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Тогда $\frac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}=\frac{1}{\sin 2x}$, т.е.

$\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{3}=2\left(1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2+2\sin 2x$; $1-\frac{1}{3}\sin 2x=2\sin 2x+2\sin^2 2x$;

$2\sin^2 2x+2\frac{1}{3}\sin 2x-1=0$. Откуда $\sin 2x=\frac{3}{2}$ (не имеет решений) и

$\sin 2x=-\frac{1}{3}$, откуда $x=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

1427. Указание: $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

1428. Указание: $\sin^2 \frac{25\pi}{6} = \frac{1}{4}$. $\sin^4 x - \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 +$

$$+\frac{1}{4}\left(1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}(1 + \sin 2x)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x).$$

1429. Указание: $\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin x \cos 2x = -\sin 5x + 2\sin x \cos 2x =$

$= \cos 2x(\sin x - \sin 3x) + \sin x(\cos 2x - 2\sin x \cos 3x) = -2\cos 2x \sin x \cos 2x +$

$+ \sin x(\cos 2x - 2\sin x \cos 3x) = \sin x(\cos 2x - 2\sin x \cos 3x - 2\cos^2 2x)$, откуда $\sin x = 0$ или $\cos 2x - 2\sin x \cos 3x - 2\cos^2 2x = 0$.

1430. Аналогично задачам 687 и 688.

1431. 1) Указание: из первого уравнения $x = 3y - 5$. Подставьте во второе уравнение.

2) Указание: пусть $\frac{x+y}{x-y} = u$, тогда $u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}$, откуда $u = 3$ или $u = \frac{1}{3}$.

Тогда $\frac{x+y}{x-y} = 3$ или $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}$.

1432. 1) Указание: из второго уравнения $3^y = \frac{12}{6^x}$, тогда $6^x - \frac{24}{6^x} = 2$;

$(6^x)^2 - 2 \cdot 6^x - 24 = 0$, откуда $6^x = 6$ или $6^x = -4$ (не имеет решений).

2) Указание: домножьте первое уравнение на 5, второе на 6 и сложите уравнения.

1433. 1) $\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ \lg(y - 4x) = 2\lg(2 + 2x - y) - \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ y - 4x = \frac{(2 + 2x - y)^2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27 \cdot 3^{-x^2-1} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ x^2 + 2x + 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 3^{-x^2} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ x^2 + 2x + 1 = y \end{cases}$$

Решение: сделаем замену: $u = 3^{x^2}$. Тогда $\frac{9}{u} + u = 4\sqrt{3}$; $u^2 - 4\sqrt{3}u + 9 = 0$,

откуда $u = \sqrt{3}$ и $u = 3\sqrt{3}$. Т.е. $3^{x^2} = 3^{\frac{1}{2}}$ или $3^{x^2} = 3^{\frac{3}{2}}$. Из первого уравнения $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. Из второго уравнения $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$y = \left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$ – не удовлетворяет условию $y > 4x$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$.

2) Аналогично 1).

1434. Указание: из первого уравнения $\frac{y-3}{x} = 1$, т.е. $y = 3 + x$. Подставьте во второе уравнение, необходимо $D \geq 0$ и хотя бы один из корней положительный.

1435. 1) Указание: $\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x - 4 + x}{(4-x)x} = \frac{2(x^2 - x - 2)}{(4-x)x}$, решите методом интервалов.

2) $\frac{2x-5}{|x+1|} \geq 1$. Решение: О.О.Н. $x \neq -1$. Домножим обе части неравенства на $|x+1|$, тогда $2x+5 \geq |x+1|$. Рассмотрим два случая:

Если $x > -1$, то $2x+5 \geq x+1$, $x \geq -4$. С учетом ограничения $x > -1$.

Если $x < -1$, то $2x+5 \geq -x-1$, $x \geq -2$, т.е. $-2 \leq x < -1$.

Ответ: $-2 \leq x < -1$, $x > -1$.

1436. 1) Указание: $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} = 2 + \frac{1}{4x^2-2x+1}$. $4x^2-2x+1 \geq \frac{3}{4}$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

2) Указание: $\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3(9x^2-12x+16)}$. $9x^2-12x+16 \geq 12$ при всех $x \in \mathbf{R}$.

1437. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $x^2 - 5x + 6 > 0$.

2) Указание: преобразуйте неравенство: $5^{x-2}(25-10) > 3^{x-2}(27-2)$, т.е. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \frac{5}{3}$, т.е. $x - 2 > 1$.

1438. 1) Указание: неравенство равносильно неравенству $1 + x - \sqrt{x^2-4} \geq 1$.

2) Указание: сделайте замену $u = \log_5(3-2x)$, тогда $\frac{1}{u} - \frac{1}{4-u} < 0$.

1439. 1) $\log_{|2x+1|} x^2 \ge 2$. Решение: О.О.Н. $\begin{cases} x^2 > 0 \\ |2x+1| \ne 1 \\ |2x+1| \ne 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne -1 \\ x \ne -0{,}5 \end{cases}$. Тогда

$\log_{|2x+1|}|x| \ge 1$.

Если $|2x+1| < 1$, то необходимо $|x| \le |2x+1|$, откуда $0 < x < 1$.

Если $|2x+1| \ge 1$, то $|x| \ge |2x+1|$, тогда $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$, $0 < x < 1$.

2) Аналогично 1).

1440. $\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$. Решение: О.О.Н. $x^2+3x-4 \ge 0$, т.е. $x \ge 1$ или $x \le -4$. Тогда $\frac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}+x-3}{x-3} < 0$; $\frac{4-2x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < 0$.

Тогда если $x > 3$, то $4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} < 0$; $\sqrt{x^2+3x-4} < 2x-4$.

При $x > 3$ $2x-4 > 0$, возведем обе части неравенства в квадрат. Получим $x^2+3x-4 < 4x^2-16x+16$; $3x^2-19x+20 > 0$, откуда $x > 5$ или $x < \frac{4}{3}$ (не удовлетворяет условию $x > 3$).

Если $x < 3$, то с учетом О.О. $x \le -4$. Тогда $\sqrt{x^2+3x-4} > 2(x-2)$. Но в этом случае $x-2 < 0$, а $\sqrt{x^2+3x-4} \ge 0$. Т.е. $x \le -4$ – решение.

Ответ: $x \le -4$, $x > 5$.

1441. Решение: по свойству логарифмической функции $x^2+ax+1 > \frac{1}{2}$, т.е. $x^2+ax+\frac{1}{2} > 0$ при всех $x < 0$. Это равносильно тому, что квадратное уравнение $x^2+ax+\frac{1}{2} = 0$ либо не имеет корней, либо оба корня больше нуля. В первом случае $a^2-2 < 0$, т.е. $|a| < \sqrt{2}$. Во втором случае $a^2-2 \ge 0$ и $-\frac{a}{2} > 0$ (т.е. вершина параболы правее точки нуль). Откуда получаем $a \le -\sqrt{2}$. С учетом первого случая $a < \sqrt{2}$. Ответ: $a < \sqrt{2}$.

1442. Указание: уравнение касательной $y = 2(x_0 - 1)x + x_0^2 + 1$. Тогда $S = \frac{1}{2}(x_0^2 + 1) \cdot \frac{x_0^2 + 1}{2(1 - x_0)}$. Найдите наименьшее значение этой функции на отрезке [0, 1].

1443. Указание: уравнение касательной $y = (4x_0 - 3)x + (8 - 2x_0^2)$. Тогда $0 = (4x_0 - 3) \cdot 0 + (8 - 2x_0^2)$.

1444. Решение: найдем координаты точек пересечения параболы и прямой:

$x^2 + 2x - 3 = kx + 1$; $x^2 + (2 - k)x - 4 = 0$. $x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k - 12}}{2}$. Тогда

$$S(k) = \int_{x_1}^{x_2}(kx + 1)dx - \int_{x_1}^{x_2}(x^2 + 2x - 3)dx = \left(\frac{kx^2}{2} + x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

После преобразований получаем:

$$S(k) = \frac{1}{6}(5k^2 - 8k - 24)\sqrt{k^2 - 4k - 12}.$$

Найдем наименьшее значение $S(k)$:

$$S'(k) = \frac{1}{6}(10k - 8)\sqrt{k^2 - 4k - 12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{k(5k^2 - 8k - 24)}{\sqrt{k^2 - 4k - 12}} =$$

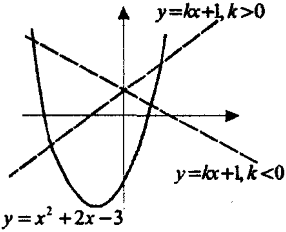

Рис. 222

$$= \frac{15k^3 - 56k^2 - 112k + 96}{6\sqrt{k^2 - 4k - 12}} = \frac{(k - 2)(15k^2 - 26k + 48)}{6\sqrt{k^2 - 4k - 12}}$$

Откуда $k = 2$ – точка минимума (см. рис. 222).

1445. Аналогично задаче 1444.

1446. Аналогично задаче 1417.

1447. Указание: $y' = -12\cos x \sin x + 6\cos x = 6\cos x(1 - 2\sin x)$. Корни производной $x = \pi k + \frac{\pi}{2}$ и $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Выберите из них те, в которых производная меняет знак с «плюса» на «минус».

1448. Решение: $y(0) = 2a + 3$, $y(2) = 4a + 15$.

Если вершина параболы не принадлежит отрезку [0; 2], т.е. $a < 0$ или $a > 4$, то необходимо $\min(2a+3;\, 4a+15) = -4$, откуда $a = -3{,}5$.

Если вершина параболы попадает в отрезок [0; 2], т.е. $0 \le a \le 4$, то необходимо $\left(\frac{a+4}{2}\right)^2 - \frac{(a+4)(a+4)}{2} + 2a + 3 = -4$, откуда находим, что таких a не существует.

Ответ: $a = -3{,}5$.

1449. Аналогично задаче 1448.

1450. Указание: необходимо, чтобы значение обоих функций в вершине было либо больше либо меньше нуля.

1451. Указание: сделайте замену $u = \sin^2 x$. Тогда $y = \frac{2u^2 - 3u + 2}{2u^2 - 3u + 1}$.

Оглавление

Глава I. Действительные числа

§1. Целые и рациональные числа ... 3
§2. Действительные числа ... 4
§3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ... 6
§4. Арифметический корень натуральной степени ... 10
§5. Степень с рациональным и действительным показателями ... 16
Упражнения к главе I ... 23

Глава II. Степенная функция

§6. Степенная функция, ее свойства и график ... 29
§7. Взаимно обратные функции ... 32
§8. Равносильные уравнения и неравенства ... 35
§9. Иррациональные уравнения ... 37
§10. Иррациональные неравенства ... 41
Упражнения к главе II ... 44

Глава III. Показательная функция

§11. Показательная функция, ее свойства и график ... 49
§12. Показательные уравнения ... 51
§13. Показательные неравенства ... 57
§14. Системы показательных уравнений и неравенств ... 60
Упражнения к главе III ... 61

Глава IV. Логарифмическая функция

§15. Логарифмы ... 65
§16. Свойства логарифмов ... 70
§17. Десятичные и натуральные логарифмы ... 72
§18. Логарифмическая функция, ее свойства и график ... 74
§19. Логарифмические уравнения ... 77
§20. Логарифмические неравенства ... 81
Упражнения к главе IV ... 85

Глава V. Тригонометрические формулы

§21. Радианная мера угла ... 97
§22. Поворот точки вокруг начала координат ... 98
§23. Определение синуса, косинуса и тангенса угла ... 101
§24. Знаки синуса, косинуса и тангенса ... 104
§25. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом ... 106
§26. Тригонометрические тождества ... 107
§27. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$ ... 110
§28. Формулы сложения ... 112
§29. Синус, косинус и тангенс двойного угла ... 116
§30. Синус, косинус и тангенс половинного угла ... 120
§31. Формулы приведения ... 124
§32. Сумма и разность синусов и косинусов ... 129
Упражнения к главе V ... 132

Глава VI. Тригонометрические уравнения

§33. Уравнение $\cos x = a$ ... 137
§34. Уравнение $\sin x = a$ ... 142

§35. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ 149
§36. Решение тригонометрических уравнений 153
§37. Примеры решения тригонометрических неравенств 162
Упражнения к главе VI 164

Глава VII. Тригонометрические функции
§38. Область определения и множество значений 175
§39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций 178
§40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график 181
§41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график 185
§42. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график 187
§43. Обратные тригонометрические функции 191
Упражнения к главе VII 194

Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл
§44. Производная 200
§45. Производная степенной функции 201
§46. Правила дифференцирования 204
§47. Производная некоторых элементарных функций 211
§48. Геометрический смысл производной 218
Упражнения к главе VIII 224

Глава IX. Применение производной к исследованию функций
§49. Возрастание и убывание функции 231
§50. Экстремумы функции 234
§51. Применение производной к построению графиков функций 239
§52. Наибольшее и наименьшее значения функции 245
§53. Выпуклость графика функции, точки перегиба 247
Упражнения к главе IX 248

Глава X. Интеграл
§54. Первообразная 254
§55. Правила нахождения первообразных 255
§56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл 259
§57. Вычисление интегралов 261
§58. Вычисление площадей с помощью интегралов 264
§59. Применение производной и интеграла к решению задач 368
Упражнения к главе X 269

Упражнения для итогового повторения
1. Числа и алгебраические преобразования 275
2. Уравнения 291
3. Неравенства 305
4. Системы уравнений и неравенств 309
5. Текстовые задачи 314
6. Функции и графики 316
7. Производная и интеграл 325
8. Задания, предлагавшиеся на выпускных экзаменах 327

Задачи для внеклассной работы 334

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор ®

Щеглова Александра Павловна

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Ш.А. Алимова, Ю.Н. Колягина
(М.: Просвещение)

10–11 классы

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 28.02.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 14,3.
Тираж 15 000 экз. Заказ № 18678.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59
www.sarpk.ru